5 ΚΡΟΥΣΕΙΣ

§5.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Ορμή** $\vec{p}$ ενός σώματος μάζας m, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. (5.1)

Σύμφωνα με τον ορισμό τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{\upsilon}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα.

- **Σύστημα σωμάτων** ονομάζουμε δύο ή περισσότερα σώματα, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, συνεχώς ή στιγμιαία. Ένα σύστημα σωμάτων μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σώμα με μάζα ίση με το άθροισμα των μαζών των σωμάτων που το αποτελούν.
- **Ορμή συστήματος σωμάτων** $\vec{p}_{ολ}$, ονομάζουμε το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα. Δηλαδή

$$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_ν \quad (5.2)$$

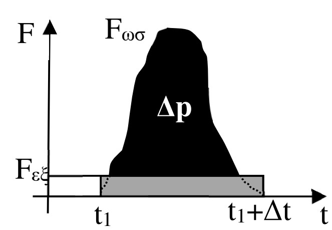
- **Ωστικές δυνάμεις** ονομάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt $\left(\Delta t \to 0\right)$ σε σχέση με το χρόνο παρατήρησης.
- **Εξωτερικές δυνάμεις** ενός συστήματος σωμάτων ονομάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος από άλλα σώματα που δεν ανήκουν στο σύστημα.
- **Εσωτερικές δυνάμεις** ενός συστήματος σωμάτων ονομάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος. Οι δυνάμεις αυτές, ανά δύο, είναι δράση – αντίδραση. Θεωρώντας το σύστημα σαν ένα σώμα, οι εσωτερικές δυνάμεις έχουν συνισταμένη ίση με το μηδέν.
- **Μονωμένο σύστημα** ονομάζεται κάθε σύστημα στο οποίο ή δεν ασκούνται καθόλου εξωτερικές δυνάμεις ή αν ασκούνται έχουν μηδενική συνισταμένη.
- **Αρχή Διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.)** Σε κάθε ΜΟΝΩΜΕΝΟ σύστημα σωμάτων η ορμή του διατηρείται σταθερή. $\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ}$. (5.3)

§5.2 ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Κρούση, στη μηχανική, ονομάζουμε την επαφή δύο σωμάτων, η οποία διαρκεί <u>ελάχιστα</u>(1) και στη διάρκειά της εμφανίζονται <u>πολύ ισχυρές</u> δυνάμεις επαφής(2) (Ωστικές Δυνάμεις).

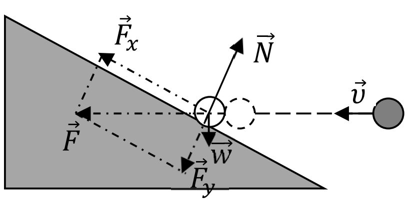
(1)<u>Διαρκεί ελάχιστα</u>: Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η επαφή των σωμάτων αρχίζει και τελειώνει στην ίδια θέση.

(2)<u>Ισχυρές Δυνάμεις Επαφής</u>: Είναι ωστικές δυνάμεις που είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα και επομένως δεν προκαλούν μεταβολή στην ορμή του συστήματος.



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του μέτρου μιας δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο. Το εμβαδό μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων εκφράζει, αριθμητικά, το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος.

Επειδή, σύμφωνα με τον ορισμό της κρούσης, οι δυνάμεις επαφής είναι πολύ ισχυρές συγκρινόμενες με τις εξωτερικές, η μεταβολή στην ορμή του σώματος εξαιτίας των εξωτερικών δυνάμεων είναι ασήμαντη, επομένως **μπορούμε να θεωρούμε το σύστημα μονωμένο και να εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. αλλά μόνο για το πολύ μικρό χρονικό διάστημα που διαρκεί η επαφή τους.** Έτσι, για παράδειγμα, για τη σύγκρουση δύο σωμάτων στον αέρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο. στο ύψος που έγινε η σύγκρουση, θεωρώντας σαν αρχική κατάσταση τη στιγμή που αρχίζει η επαφή και σαν τελική τη στιγμή που ολοκληρώνεται, αγνοώντας τις εξωτερικές δυνάμεις (των βαρών τους), των οποίων η συνισταμένη είναι διάφορη από το μηδέν.



ΠΡΟΣΟΧΗ Στην περίπτωση της κρούσης του διπλανού σχήματος, η κάθετη δύναμη στήριξης Ν είναι εξωτερική δύναμη για το σύστημα των δύο σωμάτων. Η δύναμη αυτή όμως δε μπορεί να αγνοηθεί για το, έστω και πολύ μικρό, χρονικό διάστημα της κρούσης. Αυτό συμβαίνει γιατί η δύναμη Ν είναι συνάρτηση της δύναμης επαφής F. $(N = F_y + w_y)$. Επομένως το σύστημα δεν είναι μονωμένο στον άξονα που είναι κάθετος στο πλάγιο επίπεδο, με αποτέλεσμα να μην ισχύει η ΑΔΟ για τον άξονα αυτόν. Αν όμως το πλάγιο επίπεδο είναι λείο, τότε στον παράλληλο προς το πλάγιο επίπεδο άξονα το σύστημα θεωρείται μονωμένο ($w_x \ll F_x$) και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΟ (λίγο πριν – λίγο μετά) $(\vec{p}_{\alpha\rho\chi,x} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,x})$.

Κάτι αντίστοιχο ισχύει και στην περίπτωση της κρούσης μιας αρθρωμένης ράβδου με ένα σημειακό αντικείμενο. Και εκεί η δύναμη της άρθρωσης δεν μπορεί να αγνοηθεί, γιατί είναι συνάρτηση της δύναμης επαφής ράβδου – αντικειμένου, με αποτέλεσμα να ΜΗΝ ΙΣΧΥΕΙ για ΚΑΝΕΝΑΝ ΑΞΟΝΑ η Α.Δ.Ο. Επειδή όμως η ροπή της ως προς το σημείο που αρθρώνεται είναι μηδέν (αφού διέρχεται από το σημείο αυτό), η στροφορμή του συστήματος ράβδος – σημειακό αντικείμενο διατηρείται. (Παράδειγμα 5.10)

Μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της κρούσης και στην περίπτωση που τα σώματα δεν έρχονται σε επαφή, αλλά όμως οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης να είναι ισχυρές και το φαινόμενο να διαρκεί ελάχιστα. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις εμφανίζονται στην ατομική και πυρηνική Φυσική και το φαινόμενο το ονομάζουμε σ κ έ δ α σ η. Για παράδειγμα, το πείραμα του Rutherford που είναι γνωστό σαν πείραμα σκέδασης των σωματίων α $({}^{4}_{2}He)$. Τα σωμάτια α «συγκρούονται» με πυρήνες χρυσού$({}^{197}_{79}Au)$, η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι η απωστική δύναμη Coulomb, η οποία είναι ισχυρή, λόγω της μικρής απόστασης μεταξύ των πυρήνων και δρα για πολύ μικρό χρονικό διάστημα, σχετικά με το χρόνο που παρατηρούμε το σωμάτιο α και έχει σημαντική επίδραση στην κίνησή του.

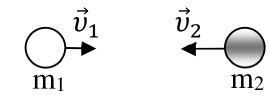
Μπορούμε να επεκτείνουμε ακόμη περισσότερο τον ορισμό της κρούσης, ώστε να συμπεριλάβουμε και την περίπτωση της αυθόρμητης διάσπασης ενός σώματος σε δύο ή περισσότερα σώματα. Τέτοιο παράδειγμα είναι η έκρηξη ή οι ραδιενεργές διασπάσεις (α,β,γ) κλπ. Κατά τη διαδικασία αυτή, μπορεί να μην έχουμε επαφή των σωμάτων αλλά υπάρχουν πολλά κοινά χαρακτηριστικά με τις κρούσεις, όπως ότι υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ των γεγονότων «πριν» και «μετά», η διάσπαση διαρκεί ελάχιστα και οι ωστικές δυνάμεις είναι ισχυρές.

§5.3 Τα ΕΙΔΗ των ΚΡΟΥΣΕΩΝ

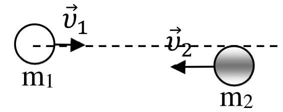
Α. Ανάλογα με τη διεύθυνση της κίνησης πριν την κρούση.

Μπορούμε να διακρίνουμε τις κρούσεις ανάλογα με τη διεύθυνση των ταχυτήτων των σωμάτων σε σχέση με την ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους.

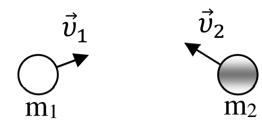
- **Α1.** ΚΕΝΤΡΙΚΗ και ΜΕΤΩΠΙΚΗ ονομάζεται η κρούση στην οποία οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων συμπίπτουν με την ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους.



- **Α2.** ΕΚΚΕΝΤΡΗ ονομάζεται η κρούση στην οποία οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων δεν συμπίπτουν με την ευθεία που συνδέει τα κέντρα μάζας τους και είναι παράλληλες μεταξύ τους.



- **Α3.** ΠΛΑΓΙΑ ονομάζεται η κρούση στην οποία οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων δεν έχουν την ίδια διεύθυνση.



Β. Ανάλογα με τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση.

Σε κάθε κρούση, τα σώματα που έρχονται σε επαφή παραμορφώνονται, μέχρι μια μέγιστη παραμόρφωση και στη συνέχεια ή επανέρχονται στο αρχικό τους σχήμα ή αποκτούν μόνιμη παραμόρφωση. Τη στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης τα δύο σώματα έχουν ίσες ταχύτητες. Η ενέργεια που απαιτείται για να γίνει η παραμόρφωση, προέρχεται από τη μηχανική ενέργεια των σωμάτων. Στη συνέχεια, ανάλογα με τη φύση των σωμάτων, μπορεί τα σώματα να επανέλθουν στο αρχικό τους σχήμα ή να παραμορφωθούν μόνιμα ή να μείνουν ενωμένα.
Επειδή η κρούση αρχίζει και τελειώνει στην ίδια θέση, η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος ΔΕ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ, επομένως η όποια μεταβολή στη μηχανική ενέργεια του συστήματος θα οφείλεται στη μεταβολή της κινητικής ενέργειας.

- **Β1.** ΕΛΑΣΤΙΚΗ ονομάζεται η κρούση στην οποία η κινητική ενέργεια του συστήματος δε μεταβάλλεται. Δηλαδή κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων ισχύει:

$$K_{1,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \pi\rho\iota\nu} + K_{2,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \pi\rho\iota\nu} = K_{1,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} + K_{2,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \qquad (5.4)$$

(όπου με *λίγο πριν* συμβολίζουμε την κατάσταση τη στιγμή που αρχίζει η κρούση και με *λίγο μετά* την κατάσταση τη στιγμή που ολοκληρώνεται η κρούση).

- **Β2.** i. ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ονομάζεται η κρούση στην οποία ΔΕΝ διατηρείται η συνολική κινητική ενέργεια, γιατί ένα μέρος της κινητικής ενέργειας που δαπανήθηκε για την παραμόρφωση των σωμάτων δε γίνεται πάλι κινητική και τα σώματα παραμένουν με μια μικρή ή μεγάλη παραμόρφωση. Στην ανελαστική κρούση ισχύει ότι

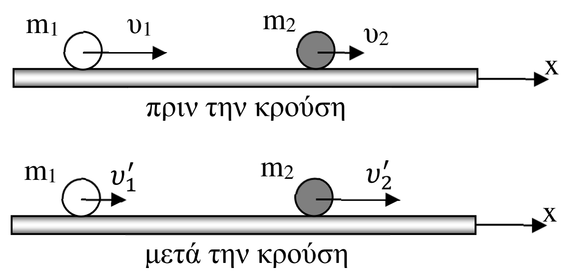
$$\left.\begin{array}{l} K_{1,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \pi\rho\iota\nu} + K_{2,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \pi\rho\iota\nu} > K_{1,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} + K_{2,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \\ \kappa\alpha\iota \quad Q = \left(K_{1,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \pi\rho\iota\nu} + K_{2,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \pi\rho\iota\nu}\right) - \left(K_{1,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} + K_{2,\lambda\acute{\iota}\gamma o\ \mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}\right) \end{array}\right\}, \qquad (5.5)$$

όπου Q το ποσό θερμότητας που εκλύεται στο περιβάλλον ή και το ποσό της θερμικής ενέργειας, αν η θερμοκρασία των σωμάτων μεταβάλλεται.

ii. Μια ειδική περίπτωση της ανελαστικής κρούσης είναι η ΤΕΛΕΙΩΣ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ή ΠΛΑΣΤΙΚΗ κρούση, κατά την οποία τα σώματα παραμένουν ενωμένα και κινούνται σαν ένα σώμα.

ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ότι σύμφωνα με τον ορισμό, <u>σε κάθε κρούση,</u> λίγο πριν και λίγο μετά, η ορμή του συστήματος διατηρείται.

§5.4 ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ



Θεωρούμε δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 τα οποία κινούνται με ταχύτητες υ_1 και υ_2 κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x.
(Αν τα σώματα είναι σφαίρες, όπως στο σχήμα, τότε θεωρούμε ότι είναι λείες και δεν περιστρέφονται.)
Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Με γνωστές τις μάζες m_1, m_2 και τις ταχύτητες υ_1, υ_2 (αλγεβρικές τιμές) των δύο σωμάτων λίγο πριν την κρούση τους, ζητάμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες (αλγεβρικές τιμές) λίγο μετά την κρούση.
Από την Α.Δ.Ο. στον άξονα x, παίρνουμε:

$\vec{p}_{λ.π.} = \vec{p}_{λ.μ.} \Rightarrow m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_1\vec{\upsilon}'_2 \xrightarrow{αλγεβρικά} m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon'_2.$ (5.6)

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, διατηρείται και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

$K_{λ.π.} = K_{λ.μ.} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\upsilon'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\upsilon'_2)^2.$ (5.7)

Οι σχέσεις 5.6 και 5.7 αποτελούν σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. Μια διαδικασία επίλυσης του συστήματος είναι και η παρακάτω:
Χωρίζουμε και στις δύο εξισώσεις τους όρους που περιέχουν τις μάζες:

5.6 $\Rightarrow m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon'_1 = m_2\upsilon'_2 - m_2\upsilon_2 \Rightarrow m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1) = m_2(\upsilon'_2 - \upsilon_2)$ (5.8)

5.7 $\Rightarrow m_1\upsilon_1^2 - m_1(\upsilon'_1)^2 = m_2(\upsilon'_2)^2 - m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow m_1(\upsilon_1^2 - (\upsilon'_1)^2) = m_2((\upsilon'_2)^2 - \upsilon_2^2) \xrightarrow{διαφ.τετρ.}$
$\Rightarrow m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1)(\upsilon_1 + \upsilon'_1) = m_2(\upsilon'_2 - \upsilon_2)(\upsilon'_2 + \upsilon_2).$ (5.9)

Επειδή $\upsilon_1 \neq \upsilon'_1$ και $\upsilon_2 \neq \upsilon'_2$, διαιρούμε κατά μέλη τις 5.8 και 5.9:

$\frac{(5.9)}{(5.8)} \rightarrow \frac{m_1(\upsilon_1-\upsilon'_1)(\upsilon_1+\upsilon'_1)}{m_1(\upsilon_1-\upsilon'_1)} = \frac{m_2(\upsilon'_2-\upsilon_2)(\upsilon'_2+\upsilon_2)}{m_2(\upsilon'_2-\upsilon_2)} \Rightarrow \upsilon_1 + \upsilon'_1 = \upsilon'_2 + \upsilon_2.$ (5.10)

Λύνουμε την 5.10 ως προς τον έναν άγνωστο: $\upsilon'_2 = \upsilon_1 + \upsilon'_1 - \upsilon_2.$ (5.11)

5.8 $\overset{5.11}{\Longrightarrow} m_1(\upsilon_1 - \upsilon'_1) = m_2(\upsilon_1 + \upsilon'_1 - \upsilon_2 - \upsilon_2) \Rightarrow m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon'_1 = m_2\upsilon_1 + m_2\upsilon'_1 - 2m_2\upsilon_2 \Rightarrow$
$(m_1 + m_2)\upsilon'_1 = (m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon'_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2.$ (5.12)

5.11 $\overset{5.12}{\Longrightarrow}$ ... $\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2.$ (5.13)

<u>**ΠΡΟΣΟΧΗ**</u> Οι εξισώσεις 5.12 και 5.13 προέκυψαν θεωρώντας θετικές τις αλγεβρικές τιμές όλων των ταχυτήτων. Αν κάποια ταχύτητα από τις υ_1 και υ_2 δοθεί με αρνητική φορά, τότε την αντικαθιστούμε με πρόσημο -. Επίσης αν μετά τις αντικαταστάσεις κάποια από τις υ'_1 ή υ'_2 προκύψει αρνητική, σημαίνει ότι έχει αντίθετη φορά από αυτή που ορίσαμε ως θετική.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

Α. Τα δύο σώματα έχουν ΙΣΕΣ μάζες. ($m_1 = m_2$)

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις 5.12 και 5.13 όπου m_2 το m_1:

$$5.12 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{m_1 - m_1}{m_1 + m_1}\upsilon_1 + \frac{2m_1}{m_1 + m_1}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1' = \upsilon_2$$

$$5.13 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_1}\upsilon_1 + \frac{m_1 - m_1}{m_1 + m_1}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2' = \upsilon_1$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της κεντρικής ελαστικής κρούσης δύο σωμάτων με ίσες μάζες, τα σώματα ανταλλάσσουν τις ταχύτητές τους.

Β. Το ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο.

Έστω ότι το αρχικά ακίνητο σώμα είναι αυτό που έχει μάζα m_2. Επομένως αντικαθιστούμε στις εξισώσεις 5.12 και 5.13 όπου **υ_2 = 0**.

$$5.12 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1} \qquad (5.14)$$

$$5.13 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1} \qquad (5.15)$$

Β1. Αν επιπλέον είναι και $m_1 = m_2$, τότε από τις εξισώσεις 5.14 και 5.15 προκύπτει ότι $\upsilon_1' = 0$ και $\upsilon_2' = \upsilon_1$, δηλαδή το αρχικά κινούμενο σώμα ακινητοποιείται, ενώ το αρχικά ακίνητο σώμα κινείται με την ταχύτητα του πρώτου. (ανταλλαγή ταχυτήτων)

Β2. i. Αν το αρχικά κινούμενο σώμα έχει μεγαλύτερη μάζα ($m_1 > m_2$) τότε από τις 5.14 και 5.15 προκύπτει ότι $\upsilon_1' > 0$ και $\upsilon_2' > 0$. Αυτό σημαίνει ότι και τα δύο σώματα, μετά την κρούση τους θα κινηθούν προς την ίδια κατεύθυνση (θετική).

Επειδή όμως $m_1 - m_2 < 2m_1$, θα είναι και $\upsilon_1' < \upsilon_2'$, επομένως τα δύο σώματα θα απομακρύ-νονται μεταξύ τους.

ii. Αν το αρχικά κινούμενο σώμα έχει μικρότερη μάζα ($m_1 < m_2$) τότε από τις 5.14 και 5.15 προκύπτει ότι $\upsilon_1' < 0$ και $\upsilon_2' > 0$. Αυτό σημαίνει ότι μετά την κρούση τους θα κινηθούν προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Β3. i. Αν το αρχικά κινούμενο σώμα έχει πολύ μικρότερη μάζα ($m_1 \ll m_2$) τότε για το λόγο $\frac{m_1}{m_2}$ ισχύει: $\frac{m_1}{m_2} \cong 0$. Διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με τη μεγάλη μάζα (m_2) στις εξισώσεις 5.14 και 5.15 και έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{\frac{m_1 - m_2}{m_2}}{\frac{m_1 + m_2}{m_2}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{0 - 1}{0 + 1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = -\upsilon_1$$

$$\upsilon_2' = \frac{\frac{2m_1}{m_2}}{\frac{m_1 + m_2}{m_2}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2 \cdot 0}{0 + 1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = 0$$

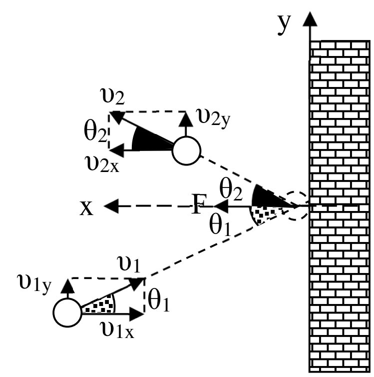
Μετά την κρούση το αρχικά κινούμενο σώμα κινείται αντίθετα με ταχύτητα ίδιου μέτρου, ενώ το αρχικά ακίνητο παραμένει ακίνητο και μετά την κρούση. Παράδειγμα τέτοιας κρούσης είναι η σύγκρουση μιας μικρής ελαστικής μπάλας με ακίνητο φορτηγό.

ii. Αν το αρχικά κινούμενο σώμα έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα ($m_1 \gg m_2$) τότε για το λόγο $\frac{m_2}{m_1}$ ισχύει: $\frac{m_2}{m_1} \cong 0$. Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τη μεγάλη μάζα (m_1) στις εξισώσεις 5.14 και 5.15 και έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{\frac{m_1 - m_2}{m_1}}{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{1-0}{1+0}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \upsilon_1$$

$$\upsilon_2' = \frac{\frac{2m_1}{m_1}}{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\frac{m_1}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\cdot 1}{1+0}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = 2\cdot\upsilon_1$$

Μετά την κρούση το αρχικά κινούμενο σώμα εξακολουθεί να κινείται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και ίδιας φοράς, ενώ το αρχικά ακίνητο σώμα αποκτά ταχύτητα διπλάσιου μέτρου από την ταχύτητα που είχε το αρχικά κινούμενο. Παράδειγμα τέτοιας κρούσης είναι η σύγκρουση φορτηγού με ένα ακίνητο μπαλάκι που κρέμεται από ένα νήμα.



Β4. Ένα μικρό ελαστικό μπαλάκι μάζας m, που κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_1, σε λείο οριζόντιο δάπεδο, συγκρούεται ελαστικά με λείο τοίχο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θεωρούμε ότι η επαφή διαρκεί ελάχιστα. Μετά την κρούση το μπαλάκι έχει ταχύτητα μέτρου υ_2. Η δύναμη επαφής F μπάλας – τοίχου είναι κάθετη στον λείο τοίχο. Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton ισχύει $\vec{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta p_x} + \overrightarrow{\Delta p_y}}{\Delta t}$. Η δύναμη F έχει τη διεύθυνση του άξονα x, άρα μεταβάλλει την ορμή της μπάλας μόνο κατά τον άξονα x. Επομένως θα είναι $\overrightarrow{\Delta p_y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{2y} - \vec{p}_{1y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{2y} = \vec{p}_{1y} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_{2y} = m\vec{\upsilon}_{1y} \longrightarrow$

$\upsilon_{2y} = \upsilon_{1y} \Rightarrow \upsilon_2 \eta\mu\theta_2 = \upsilon_1 \eta\mu\theta_1$ (5.16)

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, δεν παρατηρείται απώλεια στην κινητική ενέργεια της μπάλας, επομένως ισχύει $\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2$(μέτρα). Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας διατηρείται σταθερό. Με αντικατάσταση στην 5.16 παίρνουμε $\eta\mu\theta_2 = \eta\mu\theta_1$ και επειδή οι γωνίες θ_1 και θ_2 είναι οξείες, προκύπτει $\theta_1 = \theta_2$. Η γωνία θ_1 που σχηματίζει η $\overrightarrow{\upsilon_1}$ με την κάθετη στον τοίχο αντιστοιχεί στη γωνία προσπτώσεως και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η $\overrightarrow{\upsilon_2}$ με την ίδια κάθετη αντιστοιχεί στη γωνία ανακλάσεως, οπότε προκύπτει ο νόμος της ανάκλασης (για την ελαστική κρούση)

ΓΩΝΙΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΕΩΣ = ΓΩΝΙΑ ΑΝΑΚΛΑΣΕΩΣ

Για τη μεταβολή στην ορμή της μπάλας ισχύει $\overrightarrow{\Delta p} = \overrightarrow{\Delta p_x} = m(\vec{\upsilon}_{2x} - \vec{\upsilon}_{1x})$ ή για το μέτρο της μεταβολής $|\overrightarrow{\Delta p}| = m[|\upsilon_2|\sigma\upsilon\nu\theta_2 - (-|\upsilon_1|\sigma\upsilon\nu\theta_1)] = 2m|\upsilon_1|\sigma\upsilon\nu\theta_1$.

<u>**ΣΧΟΛΙΟ:**</u> Η εξίσωση 5.10 γράφεται $\upsilon_1 - \upsilon_2 = \upsilon_2' - \upsilon_1' \Rightarrow \upsilon_1 - \upsilon_2 = -(\upsilon_1' - \upsilon_2')$. (5.17)

Η διαφορά $\upsilon_1 - \upsilon_2$ εκφράζει την ταχύτητα που μετράει για το σώμα μάζας m_1 ένας παρατηρητής ακίνητος ως προς το σώμα μάζας m_2 (που κινείται μαζί με το m_2), δηλαδή τη **σχετική ταχύτητα** του m_1 ως προς το m_2. Επίσης η διαφορά $\upsilon_1' - \upsilon_2'$ εκφράζει την ταχύτητα που μετράει για το m_1 ο ίδιος παρατηρητής μετά την κεντρική ελαστική κρούση.

Σύμφωνα με την 5.17 οι σχετικές ταχύτητες, ως προς τον ίδιο παρατηρητή, των δύο σωμάτων πριν και μετά την κρούση είναι αντίθετες. Η 5.17 ισχύει και σε διανυσματική μορφή: $\boxed{\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2')}$.

Παράδειγμα 5.1 Ένα σώμα $Σ_1$ έχει μάζα M και κινείται με ταχύτητα $υ_1$ = 10 m/s κατά μήκος του άξονα x. Το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα $Σ_2$ μάζας 4M, που κινείται αντίθετα με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ = 5 m/s. Να υπολογίσετε

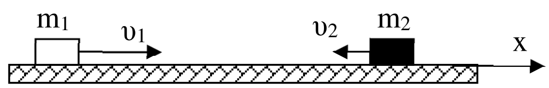
α. τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση τους.

β. το λόγο των σχετικών ταχυτήτων των δύο σωμάτων, πριν και μετά την κρούση τους, ως προς τον ίδιο παρατηρητή.

γ. το % ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που μεταβιβάστηκε σε κάθε σώμα χωριστά.

Λύση

Θεωρούμε θετική τη φορά της ταχύτητας $υ_1$. Από την εκφώνηση δίνονται



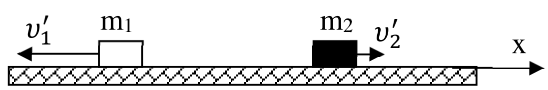
$m_1 = M$, $m_2 = 4M$, $υ_1 = 10$ m/s και $υ_2 = -5$ m/s.

α. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στις εξισώσεις 5.12 και 5.13:

$υ_1' = \frac{M-4M}{M+4M}10\frac{m}{s} + \frac{2\cdot 4M}{M+4M}\left(-5\frac{m}{s}\right) \Rightarrow υ_1' = -\frac{3M}{5M}\cdot 10\frac{m}{s} - \frac{8M}{5M}\cdot 5\frac{m}{s} \Rightarrow υ_1' = -14m/s$ και

$υ_2' = \frac{2M}{M+4M}\ 10\frac{m}{s} + \frac{4M-M}{M+4M}\left(-5\frac{m}{s}\right) \Rightarrow υ_2' = \frac{2M}{5M}10\frac{m}{s} - \frac{3M}{5M}5\frac{m}{s} \Rightarrow υ_2' = 1\ m/s.$

Το σώμα $Σ_1$ μετά την κρούση θα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x, ενώ το σώμα $Σ_2$ θα κινείται προς τη θετική, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, με ταχύτητες μέτρων 14 m/s και 1 m/s, αντίστοιχα.



β. Η σχετική ταχύτητα του $Σ_1$ ως προς το $Σ_2$ πριν την κρούση είναι $υ_1 - υ_2 = [10-(-5)]\frac{m}{s} = 15\frac{m}{s}$, ενώ μετά την κρούση είναι $υ_1' - υ_2' = (-14-1)\frac{m}{s} = -15\frac{m}{s}$. Παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η 5.17. Για το λόγο των σχετικών ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση ισχύει $\frac{υ_1-υ_2}{υ_1'-υ_2'} = \frac{15}{-15} \Rightarrow \frac{υ_1-υ_2}{υ_1'-υ_2'} = -1$, σχέση που ισχύει σε κάθε κεντρική ελαστική κρούση.

γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι

$K_{αρχ} = \frac{1}{2}Mυ_1^2 + \frac{1}{2}4Mυ_2^2 \overset{(S.I.)}{\Longrightarrow} K_{αρχ} = 50M + 50M \Rightarrow K_{αρχ} = 100M$ (S.I.).

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του $Σ_1$ είναι

$ΔK_1 = K_{1,τελ} - K_{1,αρχ} = \frac{1}{2}M(υ_1')^2 - \frac{1}{2}Mυ_1^2 \overset{(S.I.)}{\Longrightarrow} ΔK_1 = 98M - 50M \Rightarrow ΔK_1 = 48M.$ (S.I.).

Το % ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του $Σ_1$ είναι

$$\frac{ΔK_1}{K_{αρχ}}100\% = \frac{48M}{100M}100\% = 48\%$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του $Σ_2$ είναι

$ΔK_2 = K_{2,τελ} - K_{2,αρχ} = \frac{1}{2}4M(υ_2')^2 - \frac{1}{2}4Mυ_2^2 \overset{(S.I.)}{\Longrightarrow} ΔK_2 = 2M - 50M \Rightarrow ΔK_2 = -48M.$ (S.I.).

Το % ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του $Σ_2$ είναι

$$\frac{ΔK_2}{K_{αρχ}}100\% = \frac{-48M}{100M}100\% = -48\%$$

Παρατηρήστε ότι $ΔK_1 + ΔK_2 = 0$, σχέση που ισχύει σε κάθε ελαστική κρούση.

Παράδειγμα 5.2 Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 = 4 kg έχει ταχύτητα $υ_1$ = 3 m/s και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα $Σ_2$, ίδιων διαστάσεων και μάζας m_2 = 2 kg.
Να υπολογίσετε

α. τις τελικές ταχύτητες των δύο σωμάτων, αμέσως μετά την κρούση τους.

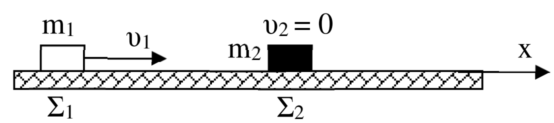
β. το ποσό της κινητικής ενέργειας που απέκτησε το $Σ_2$ και το ποσό της κινητικής ενέργειας που έχασε το σώμα $Σ_1$.

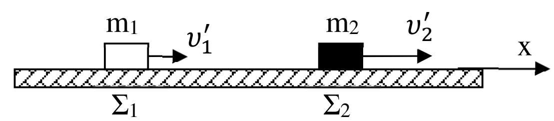
γ. τη μεταβολή της ορμής του $Σ_1$ και τη μεταβολή της ορμής του $Σ_2$.

δ. το ποσοστό % της αρχικής κινητικής ενέργειας που έχασε το $Σ_1$.

ε. το λόγο $\frac{m_1}{m_2}$ των μαζών που έπρεπε να είχαν τα δύο σώματα, ώστε το ποσοστό της ενέργειας που έχασε το σώμα $Σ_1$, να είναι μέγιστο.

Λύση





α. Επειδή το ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις 5.14 και 5.15.

$5.14 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{4kg-2kg}{4kg+2kg} 3\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1' = 1\, m/s.$

$5.15 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\cdot 4kg}{4kg+2kg} 3\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_2' = 4\, m/s.$

β. $K_2' = \frac{1}{2}m_2(\upsilon_2')^2 \overset{S.I}{\Rightarrow} K_2' = \frac{1}{2}2\cdot 4^2 \Rightarrow K_2' = 16\, J.$

(Επειδή το σώμα $Σ_2$ ήταν αρχικά ακίνητο, η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας είναι

$\Delta K_2 = K_2' - K_2 \Rightarrow \Delta K_2 = 16\,J - 0 \Rightarrow \Delta K_2 = 16\,J$).

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του $Σ_1$ είναι

$\Delta K_1 = K_1' - K_1 \Rightarrow \Delta K_1 = \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1')^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \overset{S.I}{\Rightarrow} \Delta K_1 = \frac{1}{2}4\cdot 1^2 - \frac{1}{2}4\cdot 3^2 \Rightarrow \Delta K_1 = -16\,J.$

Επομένως η ενέργεια που έχασε το $Σ_1$ είναι 16 J.

Παρατηρήστε ότι $ΔK_1 + ΔK_2 = 0$, σχέση που ισχύει σε κάθε ελαστική κρούση.

γ. $\Delta p_1 = m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 \overset{S.I}{\Rightarrow} \Delta p_1 = 4\cdot 1 - 4\cdot 3 \Rightarrow \Delta p_1 = -8\, kg\cdot m/s.$

$\Delta p_2 = m_2\upsilon_2' - m_2\upsilon_2 \overset{S.I}{\Rightarrow} \Delta p_2 = 2\cdot 4 - 2\cdot 0 \Rightarrow \Delta p_2 = +8\, kg\cdot m/s.$

Παρατηρήστε ότι $Δp_1 + Δp_2 = 0$.

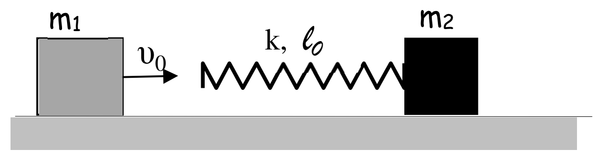
δ. Είναι $\Pi_1(\%) = \frac{\Delta K_1}{K_1}\cdot 100\% = -\frac{16}{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3^2}\cdot 100\% = -88{,}9\%$. Το πρόσημο – δηλώνει την απώλεια της κινητικής ενέργειας. Προφανώς το ποσοστό αύξησης της κινητικής ενέργειας του $Σ_2$ είναι 88,9%.

ε. Το ποσοστό της ενέργειας που έχασε το $Σ_1$ είναι ίσο με το ποσοστό της ενέργειας που κέρδισε το $Σ_2$. Η μέγιστη τιμή του ποσοστού αυτού είναι προφανώς το 100%.

Αυτό σημαίνει ότι το $Σ_1$ χάνει όλη του την κινητική ενέργεια, δηλαδή ακινητοποιείται.

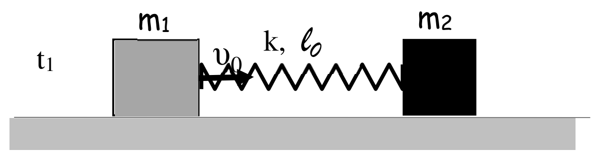
$K_1' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1')^2 = 0 \Rightarrow \upsilon_1' = 0 \overset{5.14}{\Longrightarrow} \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$ ή $\frac{m_1}{m_2} = 1.$

Παράδειγμα 5.3 Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 που έχει ταχύτητα $υ_0$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο προς ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2, που έχει στο πίσω μέρος του δεμένο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους ℓ_0, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ζητάμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου (ή την ελάχιστη απόσταση που θα πλησιάσουν μεταξύ τους τα δύο σώματα) και να παραστήσουμε γραφικά, σε συνάρτηση με το χρόνο, την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου (ποιοτικά διαγράμματα).



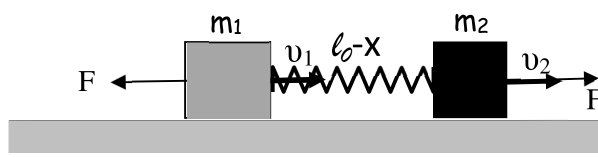
Λύση

Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα $Σ_1$ έρχεται σε επαφή με το αριστερό άκρο του ελατηρίου (σχήμα 1). Τη στιγμή αυτή το σώμα $Σ_1$ έχει ταχύτητα $υ_0$, το σώμα $Σ_2$ είναι ακίνητο και κατά τον άξονα κίνησης x δεν ασκείται καμία δύναμη.



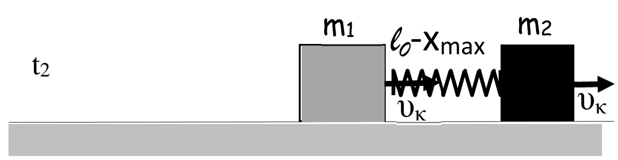
σχήμα 1

Κάποια στιγμή, λίγο μετά την t_1, το ελατήριο έχει συμπιεστεί κατά x και ασκεί στα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ δυνάμεις F ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς (σχήμα 2). Τη στιγμή αυτή το $Σ_1$ έχει ταχύτητα $υ_1$ και το $Σ_2$ ταχύτητα $υ_2$.



σχήμα 2

Επειδή η δύναμη F που ασκείται από το ελατήριο στο $Σ_1$ είναι αντίρροπη από την ταχύτητά του, το σώμα θα επιβραδύνεται και η ταχύτητα του θα μειώνεται. Αντίθετα, η ταχύτητα του $Σ_2$, από μηδέν που ήταν θα αρχίσει να αυξάνεται. Όσο χρόνο όμως η $υ_1$ είναι μεγαλύτερη από τη $υ_2$, το $Σ_1$ θα πλησιάζει το $Σ_2$ και το ελατήριο θα συμπιέζεται. Όμως η $υ_1$ μειώνεται συνεχώς και η $υ_2$ αυξάνεται συνεχώς. Κάποτε λοιπόν η $υ_2$ θα γίνει μεγαλύτερη από την $υ_1$, η απόσταση μεταξύ των σωμάτων θα αυξάνεται και το ελατήριο θα αποσυσπειρώνεται. Επομένως το ελατήριο θα έχει τη μεγαλύτερη συμπίεσή του τη στιγμή t_2 που τα δύο σώματα έχουν ίσες ταχύτητες (σχήμα 3).



σχήμα 3

Μετά τη χρονική στιγμή t_2 το ελατήριο αποσυσπειρώνεται μέχρι να αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος και τα δύο σώματα να αποχωριστούν (χρονική στιγμή t_3).

Για να υπολογίσουμε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου, πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα $υ_κ$ που έχουν τα δύο σώματα τη στιγμή της μέγιστης συμπίεσης. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια της Α.Δ.Ο για το σύστημα $Σ_1$ – $Σ_2$ – ελατήριο, το οποίο είναι συνεχώς μονωμένο μια και οι δυνάμεις F, -F στον οριζόντιο άξονα έχουν συνισταμένη ίση με το μηδέν και στον κατακόρυφο άξονα δεν υπάρχει κίνηση.

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m_1\vec{υ}_0 + \vec{0} = m_1\vec{υ}_κ + m_2\vec{υ}_κ \text{ ή } m_1υ_0 = m_1υ_k + m_2υ_k \Rightarrow υ_κ = \frac{m_1υ_0}{m_1+m_2} \qquad (5.3.1)$$

Επειδή δεν υπάρχει απώλεια στη μηχανική ενέργεια του συστήματος, μια και όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε πριν την επαφή και στη μέγιστη συμπίεση.

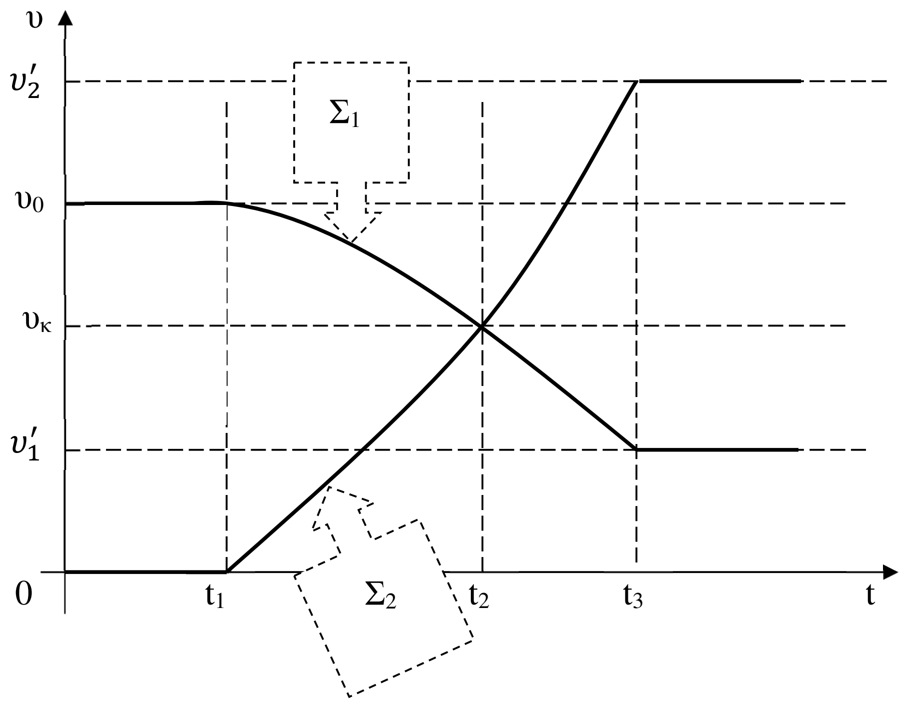
$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 \upsilon_0^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 \upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}m_2 \upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 \Rightarrow$$

$$m_1 \upsilon_0^2 = (m_1 + m_2)\upsilon_\kappa^2 + kx_{max}^2 \overset{5.3.1}{\Longrightarrow} m_1 \upsilon_0^2 = (m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 \upsilon_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + kx_{max}^2 \Rightarrow$$

$$m_1 \upsilon_0^2 = \frac{m_1^2 \upsilon_0^2}{m_1 + m_2} + kx_{max}^2 \Rightarrow kx_{max}^2 = m_1 \upsilon_0^2\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow$$

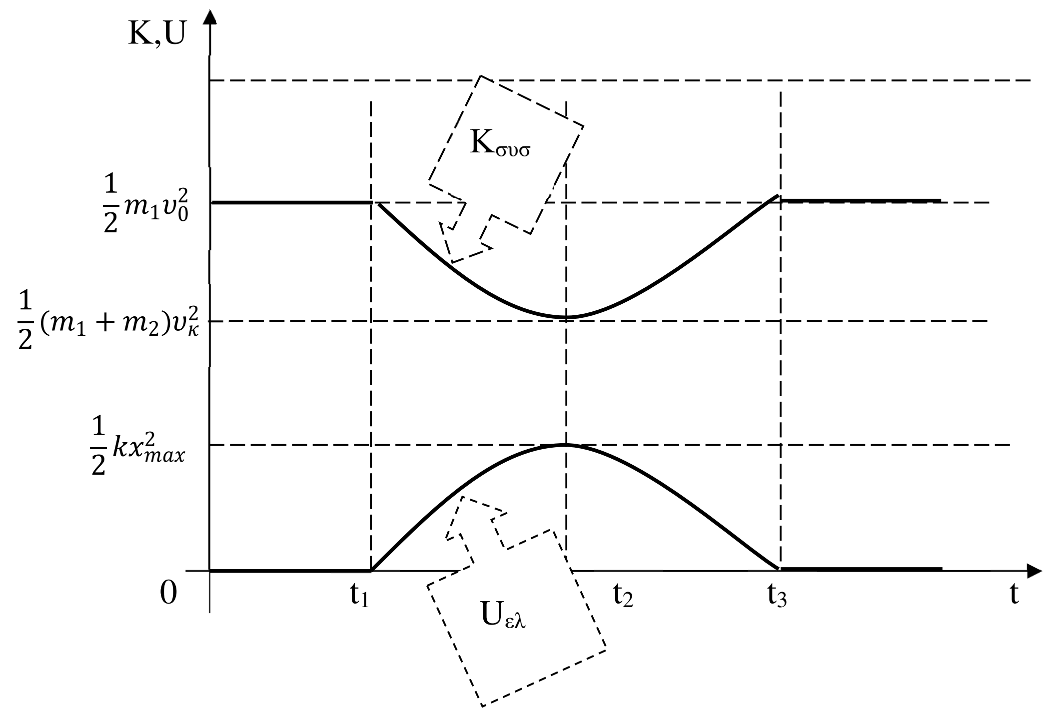
$$kx_{max}^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0^2 \Rightarrow x_{max} = \upsilon_0\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}$$

Ισοδύναμα, η ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν τα δύο σώματα είναι ℓ_0 – x_{max}.
Όταν το ελατήριο αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος τα δύο σώματα θα έχουν ταχύτητες υ_1' και υ_2', που υπολογίζονται από τις σχέσεις 5.14 και 5.15.



Στο παραπάνω διάγραμμα φαίνεται, ποιοτικά, η μεταβολή της ταχύτητας για κάθε σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος, όσο το Σ1 είναι σε επαφή με το ελατήριο, θα μεταβάλλεται, γιατί κάθε στιγμή πρέπει να ισχύει $K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} + U_{\varepsilon\lambda}$ = σταθερό. Συγκεκριμένα θα μειώνεται μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει τη μέγιστη συσπείρωσή του ($U_{\varepsilon\lambda}$ = max) και στη συνέχεια θα αυξάνεται μέχρι να αποκτήσει σταθερή τιμή ίση με $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_0^2$.
Αντίστοιχα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα αυξάνεται από την τιμή μηδέν μέχρι την τιμή $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} kx_{max}^2$ και στη συνέχεια θα μειώνεται μέχρι να γίνει πάλι ίση με μηδέν.



<u>Εφαρμογή:</u> m_1 = 4 kg, m_2 = 2 kg, k = 300 N/m, υ_0 = 3 m/s και ℓ_0 = 1 m.

Η κοινή ταχύτητα που αποκτούν τα δύο σώματα όταν το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη συμπίεσή του είναι $\upsilon_\kappa = \frac{4kg \cdot 3\frac{m}{s}}{4kg+2kg} = 2\frac{m}{s}$.

Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι

$$x_{max} = 3\frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{4kg \cdot 2kg}{(4kg+2kg)300\frac{N}{m}}} = 3\frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{8}{1800} \cdot \frac{kgm}{N}} = 3\frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{4}{900}s^2} = 0{,}2\,m$$

Η ελάχιστη απόσταση που θα πλησιάσουν τα δύο σώματα είναι $\ell_0 - x_{max}$ = 0,8 m.

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{max,\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}300\frac{N}{m}(0{,}2m)^2$ ή

$$U_{max,\varepsilon\lambda} = 6\,J$$

Η μέγιστη κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K_{max,\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 4kg \cdot \left(3\frac{m}{s}\right)^2$ ή

$$K_{max,\sigma\upsilon\sigma\tau} = 18\,J$$

Η ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K_{min,\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\kappa^2 =$
$= \frac{1}{2}(4kg+2kg)\left(2\frac{m}{s}\right)^2$ ή $K_{min,\sigma\upsilon\sigma\tau} = 12\,J$.

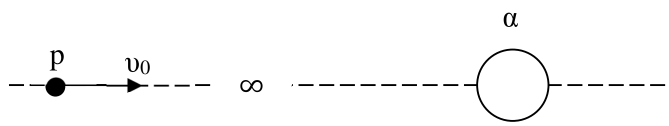
Παρατηρείστε ότι $K_{min,\sigma\upsilon\sigma\tau} + U_{max,\varepsilon\lambda} = 18\,J = K_{max,\sigma\upsilon\sigma\tau}$.

Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την αποσυσπείρωση του ελατηρίου, υπολογίζονται από τις εξισώσεις 5.14 και 5.15.

$$5.14 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{4kg-2kg}{4kg+2kg} \cdot 3\frac{m}{s} = 1\frac{m}{s}$$

$$5.15 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\cdot 4kg}{4kg+2kg}\cdot 3\frac{m}{s} = 4\frac{m}{s}$$

Παράδειγμα 5.4 Ένα πρωτόνιο εκτοξεύεται από πολύ μακριά με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10^6$ m/s προς ένα ακίνητο σωμάτιο α (^4_2He), το οποίο είναι ελεύθερο να κινηθεί, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε



α. την ταχύτητα κάθε σωματίου τη στιγμή που βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.

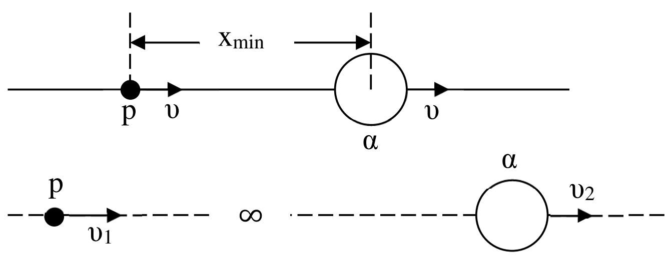
β. τη μεταβολή $K_{αρχ} – K_{τελ}$, όπου $K_{αρχ}$ η αρχική κινητική ενέργεια του πρωτονίου και $K_{τελ}$ η κινητική ενέργεια του συστήματος στην ελάχιστη απόσταση. Τι εκφράζει αυτή η διαφορά;

γ. την ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν.

δ. την ταχύτητα κάθε σωματίου, όταν θα βρεθούν ξανά σε πολύ μεγάλη απόσταση.

Δίνονται: $m_a = 4m_p$ και $m_p = 1{,}6\cdot10^{-27}$ kg, $q_a = 2q_p = 2e = 2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}C$, $1keV = 1{,}6\cdot 10^{-16}J$, $k_C = 9\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}$. Οι βαρυτικές δυνάμεις θεωρούνται αμελητέες.

Λύση



Στο σύστημα πρωτόνιο – πυρήνας ηλίου, ασκούνται μόνο οι συντηρητικές δυνάμεις Coulomb (απωστικές). Οι δυνάμεις αυτές είναι εσωτερικές του συστήματος, επομένως το σύστημα είναι ΣΥΝΕΧΩΣ μονωμένο, άρα ισχύει η Α.Δ.Ο. Επειδή οι δυνάμεις αυτές είναι συντηρητικές, ισχύει και η Α.Δ.Μ.Ε (ΠΡΟΣΟΧΗ: Όχι η Α.Δ.Κ.Ε. γιατί το σύστημα έχει ΚΑΙ ηλεκτρική ΔΥΝΑΜΙΚΗ ενέργεια, η οποία μεταβάλλεται).

α. Σκεπτόμενοι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όταν τα δύο σωμάτια βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση έχουν ίσες ταχύτητες.
Θεωρούμε σαν αρχική κατάσταση όταν τα δύο σωμάτια βρίσκονται σε άπειρη απόσταση και σαν τελική όταν απέχουν την ελάχιστη απόσταση.

Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m_p\vec{\upsilon}_0 + \vec{0} = m_p\vec{\upsilon} + m_a\vec{\upsilon} \longrightarrow m_p\upsilon_0 = (m_p+m_a)\upsilon \Rightarrow m_p\upsilon_0 = 5m_p\upsilon$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_0}{5} \Rightarrow \upsilon = 2\cdot 10^5\frac{m}{s}$$

β. $K_{τελ} = \frac{1}{2}(m_p+m_a)\upsilon^2 = \frac{5}{2}m_p\upsilon^2 \Rightarrow K_{τελ} = \frac{5}{2}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-27}kg\cdot\left(2\cdot 10^5\frac{m}{s}\right)^2$

$$\Rightarrow K_{τελ} = 1{,}6\cdot 10^{-16}J = 1keV$$

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2}m_p\upsilon_0^2 \Rightarrow K_{αρχ} = \frac{1}{2}1{,}6\cdot 10^{-27}kg\left(10^6\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow K_{αρχ} = 8\cdot 10^{-16}J = 5keV$$

$$K_{αρχ} - K_{τελ} = 8\cdot 10^{-16}J - 1{,}6\cdot 10^{-16}J = 6{,}4\cdot 10^{-16}J = 4keV$$

Α.Δ.Μ.Ε. $K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow K_{αρχ} – K_{τελ} = U_{τελ} - U_{αρχ} \rightarrow \underline{K_{αρχ} – K_{τελ} = U_{τελ}}$, επειδή $U_{αρχ} = 0$.

γ. Με τη βοήθεια της σχέσης $U_{τελ} = k_C\cdot\frac{q_pq_a}{x_{min}} = k_C\cdot\frac{2e^2}{x_{min}}$, μπορούμε να υπολογίσουμε και την ελάχιστη απόσταση που πλησιάζουν. Με αντικατάσταση: $x_{min} = 7{,}2\cdot10^{-13}$ m.

δ. Θεωρούμε σαν τελική την κατάσταση όταν τα δύο σωμάτια βρίσκονται ξανά σε άπειρη απόσταση, έχοντας ταχύτητες υ_1 και υ_2. (3^{o} σχήμα)

Α.Δ.Ο. $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_p\vec{\upsilon}_0 + \vec{0} = m_p\vec{\upsilon}_1 + m_\alpha\vec{\upsilon}_2 \longrightarrow m_p\upsilon_0 = m_p\upsilon_1 + m_\alpha\upsilon_2$

Α.Δ.Μ.Ε. $K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m_p\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_p\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_\alpha\upsilon_2^2$

Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το ίδιο με το σύστημα των εξισώσεων 5.6 και 5.7 με υ_2 = 0. Η λύση του θα μας οδηγήσει στις εξισώσεις 5.14 και 5.15 της ελαστικής κρούσης με το ένα σώμα αρχικά ακίνητο (το σωμάτιο α στο παράδειγμά μας).

$$5.14 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{m_p - m_\alpha}{m_p + m_\alpha}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{m_p - 4m_p}{m_p + 4m_p}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_1 = -\frac{3}{5}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_1 = -6\cdot 10^5\,\frac{m}{s}$$

$$5.15 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{2m_p}{m_p + m_\alpha}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{2m_p}{m_p + 4m_p}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{2}{5}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_2 = 4\cdot 10^5\,\frac{m}{s}$$

Το πρόσημο – στην ταχύτητα υ_1 δηλώνει ότι το πρωτόνιο κινείται αντίρροπα από την υ_0, δηλαδή αντίθετα από τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, με μέτρο ταχύτητας $6\cdot 10^5$ m/s.

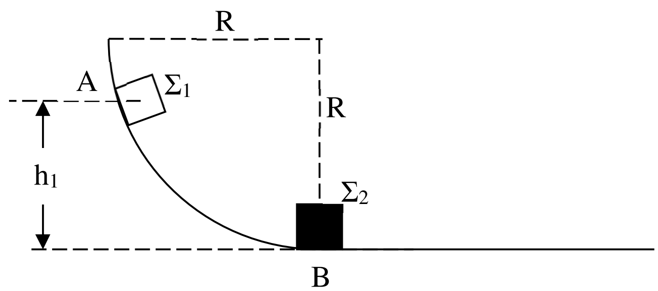
ΣΧΟΛΙΑ: 1. Επειδή η τελική ταχύτητα του πρωτονίου είναι αρνητική, σημαίνει ότι κάποια στιγμή είχε μηδενιστεί. Προσπαθήστε να υπολογίσετε την απόσταση των δύο σωματίων τη στιγμή του μηδενισμού της ταχύτητας, καθώς και την ταχύτητα του σωματίου α τη στιγμή εκείνη.

2. Μπορούμε να συγκρίνουμε τα μέτρα των εσωτερικών δυνάμεων Coulomb στην ελάχιστη απόσταση με τις εξωτερικές δυνάμεις βαρύτητας. Ας πάρουμε το πιο βαρύ, που είναι το σωμάτιο α: $w_\alpha = m_\alpha g = 4m_p g = 4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-27}\cdot 10\;N = 6{,}4\cdot 10^{-26}\;N$

$$F = k_C\frac{q_p q_\alpha}{x_{min}^2} \Rightarrow F = k_C\frac{2e^2}{x_{min}^2} \overset{S.I}{\Rightarrow} F = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{(7{,}2\cdot 10^{-13})^2}N = 8{,}9\cdot 10^{-4}N$$

$\frac{F}{w_\alpha} = \frac{8{,}9\cdot 10^{-4}N}{6{,}4\cdot 10^{-26}\;N} \cong 1{,}4\cdot 10^{22}$ δηλαδή $w_\alpha \ll F$.

Παράδειγμα 5.5 Από το σημείο Α ενός λείου κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου αφήνουμε ελεύθερο να ολισθήσει ένα μικρό σώμα Σ_1 που έχει μάζα m_1 = 1 kg. Στο κατώτερο σημείο Β του τεταρτοκυκλίου συναντά ένα άλλο ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2 = 3 kg, με το οποίο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά. Το Σ_2 στη συνέχεια κινείται στο οριζόντιο επίπεδο, που βρίσκεται στη διεύθυνση της εφαπτομένης του τεταρτοκυκλίου στο σημείο Β και σταματά αφού διανύσει διάστημα 1 m. Τα δύο σώματα έχουν με το οριζόντιο επίπεδο τον ίδιο συντελεστή κινητικής τριβής μ = 0,2. Να υπολογίσετε



α. το μέτρο της ταχύτητας υ_2' του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

β. το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 λίγο πριν την κρούση.

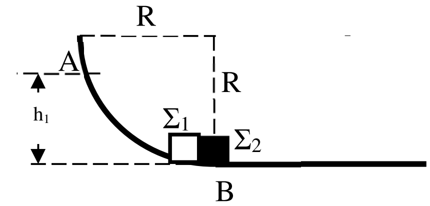
γ. το ύψος h_1 από το οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα Σ_1.

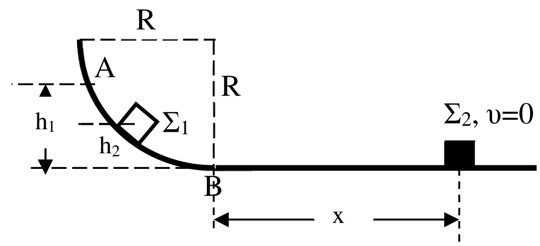
δ. την υψομετρική διαφορά μεταξύ της θέσης Α από την οποία αφέθηκε το σώμα Σ_1 και της θέσης στην οποία θα σταματήσει στιγμιαία μετά την κρούση.

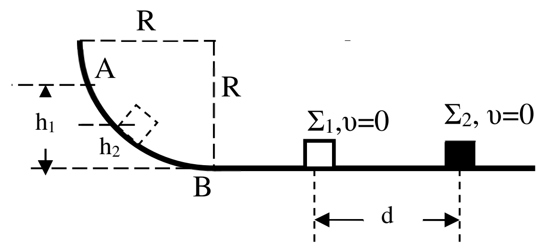
ε. την οριζόντια απόσταση μεταξύ των σωμάτων όταν θα σταματήσουν οριστικά.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση







Στο **πρώτο σχήμα** φαίνονται τα δύο σώματα τη στιγμή της κρούσης τους. Στο **δεύτερο σχήμα,** φαίνονται οι θέσεις, που τα δύο σώματα έχουν σταματήσει (το Σ_1 για πρώτη φορά). Αυτό φυσικά δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει ταυτόχρονα. Στο **τρίτο σχήμα** φαίνονται τα δύο σώματα σταματημένα οριστικά, σε απόσταση d μεταξύ τους.

α. Το σώμα Σ_2 μετά την κρούση θα σταματήσει, εξαιτίας της τριβής, αφού διανύσει διάστημα x = 1 m. Για την κίνηση του Σ_2, εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ: $K_{τελ} - K_{αρχ} = W$ (5.5.1)

Η μόνη δύναμη που έχει έργο είναι η τριβή.

$$\mathfrak{I}_{\kappa,2} = \mu N_2 \Rightarrow \mathfrak{I}_{\kappa,2} = \mu m_2 g$$

$$5.5.1 \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 (\upsilon_2')^2 = -\mathfrak{I}_{\kappa,2} \cdot x \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_2 (\upsilon_2')^2 = -\mu m_2 g \cdot x \Rightarrow \upsilon_2' = \sqrt{2\mu g x}$$

$$\overset{S.I}{\Rightarrow} \upsilon_2' = \sqrt{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10 \cdot 1} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2' = 2\frac{m}{s}}$$

β. $5.15 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{m_1+m_2}{2m_1}\upsilon_2' \Rightarrow$

$$\upsilon_1 = \frac{1kg + 3kg}{2 \cdot 1kg} \cdot 2\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 4\frac{m}{s}}$$

γ. Επειδή το τεταρτοκύκλιο είναι λείο, εφαρμόζουμε για την κίνηση του Σ_1 από το σημείο Α στο σημείο Β, την ΑΔΜΕ: $K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow 0 + m_1 g h_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + 0 \Rightarrow h_1 = \frac{\upsilon_1^2}{2g} \Rightarrow$

$$h_1 = \frac{16}{20} m \Rightarrow \boldsymbol{h_1 = 0{,}8\ m}$$

δ. Το Σ_1 αμέσως μετά την κρούση θα έχει ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση 5.14

$$5.14 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{1kg - 3kg}{1kg + 3kg} \cdot 4\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1' = -2\frac{m}{s}$$

Το πρόσημο – δηλώνει ότι η υ_1' έχει αντίθετη φορά από αυτή που θεωρήσαμε θετική (της ταχύτητας υ_1). Δηλαδή το σώμα θα κινηθεί προς το τεταρτοκύκλιο.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για την κίνηση του Σ_1 από λίγο μετά την κρούση μέχρι το ύψος h_2, που θα σταματήσει στιγμιαία: $\frac{1}{2} m_1 (\upsilon_1')^2 = m_1 g h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{(\upsilon_1')^2}{2g} \Rightarrow h_2 = \frac{4}{20} m = 0{,}2\ m.$

Η διαφορά $h_1 - h_2 = 0{,}8\ m - 0{,}2\ m \Rightarrow \boldsymbol{h_1 - h_2 = 0{,}6\ m}$.

ε. $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w + W_{\mathfrak{I}} \Rightarrow 0 - 0 = m_1 g h_2 - \mathfrak{I}_{k,1}(x - d) \Rightarrow m_1 g h_2 = \mu m_1 g x - \mu m_1 g d \Rightarrow$

$$d = \frac{\mu x - h_2}{\mu} \Rightarrow d = x - \frac{h_2}{\mu} \Rightarrow d = 1m - \frac{0{,}2m}{0{,}2} \Rightarrow \boldsymbol{d = 0}$$

Τα σώματα σταματούν στην ίδια θέση.

Παράδειγμα 5.6 Ένα σώμα Σ με μάζα M = 4,5 kg αφήνεται να πέσει από ορισμένο ύψος. Μετά από χρόνο 2 s ένα βλήμα με μάζα m = 0,5 kg, που κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, σφηνώνεται στο κέντρο μάζας του σώματος Σ, με ταχύτητα μέτρου $υ_0$. Μετά την κρούση, η οποία διαρκεί ελάχιστα, το συσσωμάτωμα κινείται προς τα πάνω και φτάνει μέχρι το ίδιο ύψος από το οποίο αφέθηκε το σώμα Σ. Να υπολογίσετε

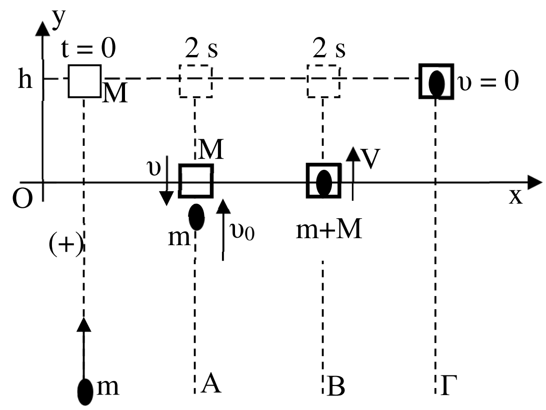
α. το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β. το μέτρο της ταχύτητας $υ_0$ του βλήματος.

γ. το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που έγινε θερμική ενέργεια κατά την κρούση.

δ. τους ρυθμούς μεταβολής της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται g = 10 m/s².



Λύση

α. Υπολογίζουμε τη μετατόπιση h του Σ από τη χρονική στιγμή t = 0 που αφέθηκε ελεύθερο μέχρι τη χρονική στιγμή t = 2 s που συγκρούστηκε με το βλήμα.

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\ (2\,s)^2 \Rightarrow$$
$$h = 20\,m$$

Εφαρμόζουμε για το συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση (θέση Β) και μέχρι τη θέση (Γ) που σταματάει στιγμιαία, το Θ.Μ.Κ.Ε.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = -(M+m)gh \Rightarrow V = \sqrt{2gh} \Rightarrow \boldsymbol{V = 20\frac{m}{s}}$$

β. Για το σύστημα βλήμα - σώμα Σ, εφαρμόζουμε την ΑΔΟ λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{υ}_0 + M\vec{υ} = (M+m)\vec{V} \rightarrow +mυ_0 - Mυ = (M+m)V \qquad (5.6.1)$$

Για την ταχύτητα υ του σώματος Σ λίγο πριν την κρούση, ισχύει υ = gt = 20 m/s.

$$5.6.1 \Rightarrow υ_0 = \frac{(M+m)V + Mυ}{m} \Rightarrow υ_0 = \frac{5\cdot 20 + 4{,}5\cdot 20}{0{,}5}\cdot\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{υ_0 = 380\frac{m}{s}}$$

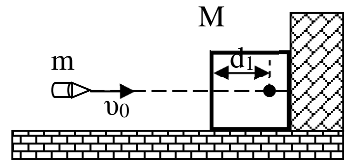
γ. Το ποσό της ενέργειας που έγινε θερμική είναι $Q = K_{συσ,λπ} - K_{συσ,λμ}$. Το ζητούμενο κλάσμα θα υπολογιστεί από τη σχέση $\frac{Q}{K_{συσ,λπ}} = \frac{K_{συσ,λπ} - K_{συσ,λμ}}{K_{συσ,λπ}} = 1 - \frac{K_{συσ,λμ}}{K_{συσ,λπ}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(M+m)V^2}{\frac{1}{2}mυ_0^2 + \frac{1}{2}Mυ^2}$

$$= 1 - \frac{5\cdot 20^2}{0{,}5\cdot 380^2 + 4{,}5\cdot 20^2} = 1 - \frac{2000}{74000} = \frac{72}{74} = \frac{36}{37} = 0{,}973$$

δ. $\frac{dK_{συστ}}{dt} = ΣF\cdot V\cdot συν180 = (M+m)gV(-1) = -5\cdot 10\cdot 20\ \frac{J}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dK_{συστ}}{dt} = -1000\ \frac{J}{s}}$

$E = σταθ \Rightarrow U + K_{συσ} = σταθ. \Rightarrow \frac{dU}{dt} + \frac{dK_{συστ}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK_{συστ}}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dU}{dt} = 1000\ \frac{J}{s}}.$

Παράδειγμα 5.7 Βλήμα μάζας m = 0,2 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ και σφηνώνεται σε σταθερό ξύλινο κύβο μάζας M = 4,8 kg σε βάθος d_1 = 0,2 m. Αν ο κύβος ήταν ελεύθερος να κινηθεί στο λείο οριζόντιο επίπεδο, να υπολογίσετε

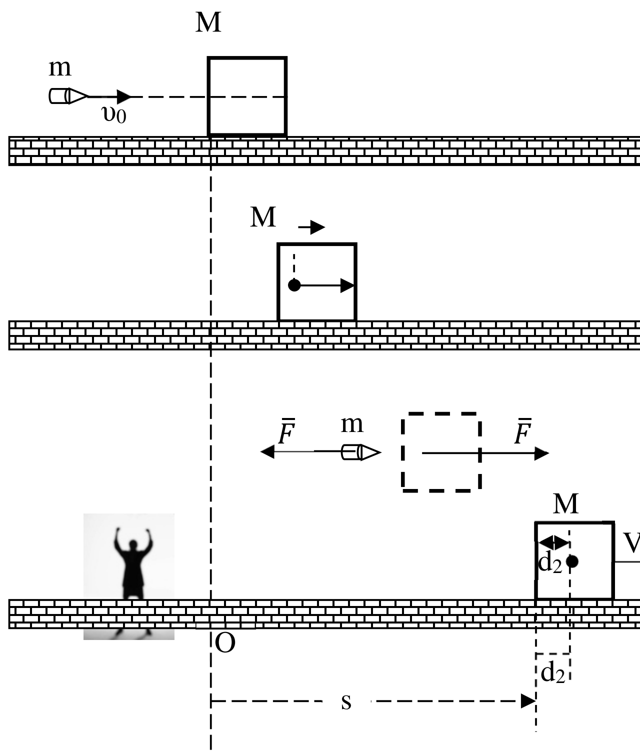


α. το βάθος στο οποίο θα εισχωρούσε το βλήμα μέσα σε αυτόν. Θεωρήστε ότι η μέση αντίσταση του ξύλου είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

β. το ποσοστό % της ελάττωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος βλήμα – κύβος κατά την κρούση.

Λύση

α. Κύβος σταθερός. Στο βλήμα ασκείται η δύναμη αντίστασης από το ξύλο, την οποία θεωρούμε σταθερή και η οποία είναι αντίρροπη από την ταχύτητα του βλήματος. Εφαρμόζουμε για το βλήμα το Θ.Μ.Κ.Ε. $K_{τελ} - K_{αρχ} = W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = -\bar{F}\cdot d_1$ (5.7.1)



Κύβος ελεύθερος. Καθώς το βλήμα κινείται μέσα στον κύβο, δέχεται δύναμη F, αντίρροπη στην ταχύτητά του. Ταυτόχρονα, σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton και ο κύβος δέχεται από το βλήμα δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς. Το αποτέλεσμα θα είναι ότι το μεν βλήμα θα επιβραδύνεται, ο δε κύβος θα επιταχύνεται, μέχρι να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα V ως προς ακίνητο παρατηρητή. Από τη στιγμή που τα δύο σώματα αποκτούν κοινή ταχύτητα και μετά, το βλήμα παύει να κινείται σχετικά με τον κύβο, άρα δε θα εισχωρεί άλλο μέσα στον κύβο.

Το σύστημα βλήμα – κύβος είναι συνεχώς μονωμένο, επομένως ισχύει η Α.Δ.Ο.

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m\vec{υ}_0 + 0 = (M+m)\vec{V} \rightarrow$
$mυ_0 = (M+m)V$
(5.7.2)

Η μετατόπιση του κύβου ως προς τον ακίνητο παρατηρητή στη θέση O είναι s, ενώ του βλήματος, ως προς τον ίδιο ακίνητο παρατηρητή, είναι s + d_2.

Εφαρμόζουμε για το βλήμα το Θ.Μ.Κ.Ε. $K_{τελ} - K_{αρχ} = W \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mυ_0^2 = -\bar{F}(s+d_2)$
(5.7.3)

Εφαρμόζουμε για τον κύβο το Θ.Μ.Κ.Ε. $K_{τελ} - K_{αρχ} = W \Rightarrow \frac{1}{2}MV^2 - 0 = +\bar{F}\cdot s$ (5.7.4)

Οι εξισώσεις 5.7.1 έως 5.7.4 αποτελούν σύστημα 4 εξισώσεων με 5 αγνώστους, τα $υ_0$, V, s, F και το ζητούμενο d_2.

$5.7.1 \Rightarrow \bar{F} = \frac{mυ_0^2}{2d_1}$ (5.7.5)

$$5.7.2 \Rightarrow V = \frac{mv_0}{M+m} \qquad (5.7.6)$$

$$5.7.4 \xRightarrow{(5.7.5),(5.7.6)} \frac{1}{2}M\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{2d_1}s \Rightarrow s = \frac{Mm}{(M+m)^2}d_1 \qquad (5.7.7)$$

$$5.7.3 \xRightarrow{(5.7.6),(5.7.5)} \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\left(\frac{m\cancel{v_0}}{M+m}\right)^2 - \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{mv_0^2} = -\frac{\cancel{mv_0^2}}{\cancel{2}d_1}(s+d_2) \Rightarrow \frac{m^2}{(M+m)^2} - 1 = -\frac{s+d_2}{d_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s + d_2 = d_1\left[1 - \frac{m^2}{(M+m)^2}\right] \Rightarrow d_2 = d_1\frac{(M+m)^2-m^2}{(M+m)^2} - s \xRightarrow{(5.7.7)}$$

$$d_2 = d_1\frac{(M+m)^2-m^2}{(M+m)^2} - \frac{Mm}{(M+m)^2}d_1 \Rightarrow d_2 = d_1\frac{M^2+Mm}{(M+m)^2} \Rightarrow d_2 = d_1\frac{M\cancel{(M+m)}}{(M+m)^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boldsymbol{d_2 = \frac{M}{M+m}d_1}.$$

Με αντικατάσταση στο S.I. έχουμε: $d_2 = \frac{4{,}8\ kg}{5\ kg}0{,}2\ m \Rightarrow \boldsymbol{d_2 = 0{,}192\ m}$.

β. Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση: $\Pi(\%) = \frac{K_{\beta\lambda}-K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_{\beta\lambda}}100\%$

$\Rightarrow \Pi(\%) = \left(1 - \frac{K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_{\beta\lambda}}\right)100\%$. Είναι $\frac{K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_{\beta\lambda}} = \frac{\frac{1}{2}(M+m)V^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} \xRightarrow{5.7.6} \frac{K_{\sigma\upsilon\sigma}}{K_{\beta\lambda}} = \frac{M+m}{m}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 = \frac{m}{M+m}$

$\Pi(\%) = \left(1 - \frac{m}{M+m}\right)100\% = \frac{M}{M+m}100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{4{,}8\ kg}{5\ kg}100\% \Rightarrow \boldsymbol{\Pi(\%) = 96\%}.$

Παράδειγμα 5.8 Ένα ξύλινο σώμα μάζας M = 1,9 kg είναι δεμένο σε αβαρές και μη εκτατό νήμα (μη εκτατό = σταθερό μήκος) μήκους ℓ και ισορροπεί με το νήμα σε κατακόρυφη θέση. Ένα βλήμα μάζας m = 0,1 kg που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ_0$ σφηνώνεται στο κέντρο μάζας του ξύλινου σώματος. Να υπολογίσετε

α. το μέτρο της ταχύτητας $υ_0$ του βλήματος, ώστε το νήμα να εκτραπεί κατά γωνία θ = 60^0, αν το νήμα έχει μήκος ℓ = 90 cm.

β. το μέτρο της ταχύτητας $υ_0$ του βλήματος, ώστε το συσσωμάτωμα να φτάσει μέχρι τη θέση που το νήμα γίνεται οριζόντιο, αν το νήμα έχει μήκος ℓ = 80 cm. Πόσο είναι το μέτρο της τάσης του νήματος τότε;

γ. τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την αρχική κατακόρυφη θέση του, τη στιγμή που μηδενίζεται η τάση του, αν το νήμα έχει μήκος ℓ = 80 cm και το βλήμα ταχύτητα $υ_0$ = 100 m/s.

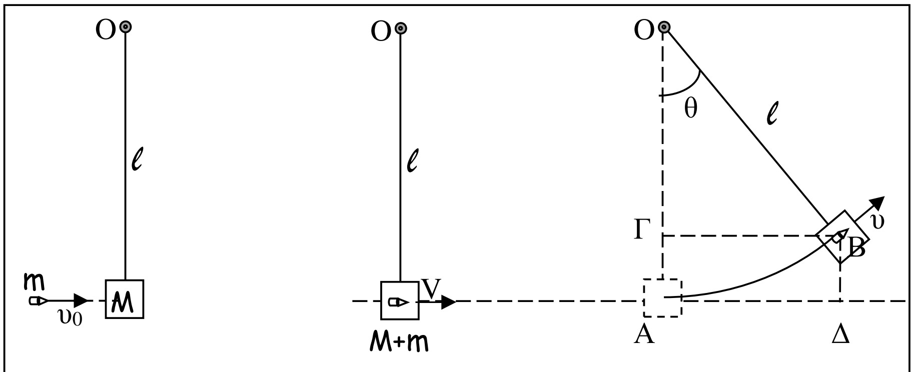
δ. την ελάχιστη ταχύτητα του βλήματος και το ποσοστό % της απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση, ώστε το συσσωμάτωμα να εκτελέσει ανακύκλωση, αν το νήμα έχει μήκος ℓ = 50 cm.

ε. τη μέγιστη ταχύτητα του βλήματος, ώστε να μη σπάσει το νήμα, αν το μήκος του είναι ℓ = 50 cm και το όριο θραύσης του είναι $T_{θρ}$ = 120 N.

Δίνεται g = 10 m/s^2.

Λύση

[Πριν προχωρήσετε στη λύση – μελέτη του παραδείγματος, καλό θα ήταν να ξαναθυμηθείτε τα σχετικά με την ανακύκλωση στη σελίδα 49].



σχήμα 1α σχήμα 1β σχήμα 1γ

Στο σχήμα 1α φαίνεται το βλήμα λίγο πριν σφηνωθεί στο ξύλο, στο σχήμα 1β φαίνεται το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την πλαστική κρούση και στο σχήμα 1γ φαίνεται το συσσωμάτωμα όταν το νήμα έχει σχηματίσει μια γωνία θ με την αρχική κατακόρυφη θέση ισορροπίας του.
Εφαρμόζουμε για την πλαστική κρούση την Α.Δ.Ο.

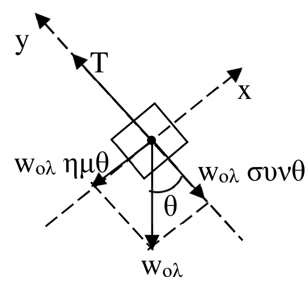
$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_0 + 0 = (M+m)\vec{V} \rightarrow m\upsilon_0 = (M+m)V \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{M+m}{m}V$ (5.8.1)

Κατά τη διάρκεια της κρούσης ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια. Μετά την κρούση η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για αμέσως μετά την κρούση μέχρι την τυχαία γωνιακή απόκλιση θ του νήματος: $E_{αρχ} = E_{τελ}$ → $K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$. Θεωρούμε $U_{αρχ} = 0$, επομένως $U_{τελ} = (M+m)gh = (M+m)g(ΑΓ)$.
Από τη γεωμετρία του σχήματος 1γ, προκύπτει ότι ΑΓ = ΟΑ – ΟΓ = $\ell - \ell$ συνθ = ℓ(1-συνθ)

Από την ΑΔΜΕ: $\frac{1}{2}(M+m)V^2 + 0 = \frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2 + (M+m)g\ell(1-\text{συνθ}) \Rightarrow$

$V^2 = \upsilon^2 + 2g\ell(1-\text{συνθ}).$ (5.8.2)

Βρίσκουμε την τάση του νήματος:
Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις, το (συνολικό) βάρος του $w_{ολ}$ και η τάση του νήματος T. Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες, μία κατά τη διεύθυνση του νήματος (άξονας y) και μία κατά τον κάθετο άξονα (άξονας x). (σχήμα 2)



σχήμα 2

Η κίνηση του σώματος είναι κυκλική με ακτίνα ℓ, η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη $F_κ$ είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα κατά τη διεύθυνση του νήματος και με φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

$$F_\kappa = T - w_{o\lambda}\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{(M+m)\upsilon^2}{\ell} = T - (M+m)g\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow T = \frac{(M+m)\upsilon^2}{\ell} + (M+m)g\sigma\upsilon\nu\theta \quad (5.8.3)$$

Παρατηρούμε ότι για συνθ ≥ 0, $\left[0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right]$, η τάση είναι θετικός αριθμός, σαν άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων, επομένως το νήμα είναι συνεχώς τεντωμένο.

α. Για θ = $θ_{max}$ = 60^0 είναι υ = 0 (σχ. 1γ) και από την 5.8.2 προκύπτει

$$V^2 = 2g\ell(1-\text{συνθ}) \Rightarrow V = \sqrt{2g\ell(1-\text{συν}\varphi)} \overset{S.I}{\Rightarrow} V = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}9\cdot(1-\frac{1}{2})} \Rightarrow V = 3\frac{m}{s}$$

Από την 5.8.1 προκύπτει $\upsilon_0 = \frac{1{,}9+0{,}1}{0{,}1}\cdot 3\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_0 = 60\frac{m}{s}}$ και από την 5.8.3 Τ = 10 Ν.

β. Στην οριζόντια θέση είναι θ = 90^0 και υ = 0.

Στη θέση αυτή, η τάση του νήματος δίνεται από τη σχέση 5.8.3 και με αντικατάσταση προκύπτει Τ = 0.

Με αντικατάσταση στην 5.8.2 έχουμε: $V^2 = 0 + 2\cdot 10\cdot 0{,}8\cdot(1-0) \Rightarrow V = 4\frac{m}{s}$.

Από την 5.8.1: $\upsilon_0 = \frac{1{,}9+0{,}1}{0{,}1}\cdot 4\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_0 = 80\frac{m}{s}}$

γ. Από την 5.8.2: $V = \frac{m}{M+m}\upsilon_0 \Rightarrow V = \frac{0{,}1}{1{,}9+0{,}1}100\frac{m}{s} \Rightarrow \mathrm{V} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Από την 5.8.3 για Τ = 0: $0 = \frac{(M+m)\upsilon^2}{\ell} + (M+m)g\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \upsilon^2 = -g\ell\sigma\upsilon\nu\theta$

Από την 5.8.2: $V^2 = -g\ell\sigma\upsilon\nu\theta + 2g\ell(1-\text{συνθ}) \Rightarrow V^2 = 2g\ell - 3g\ell\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2g\ell - V^2}{3g\ell} \overset{S.I}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{2\cdot 10\cdot 0{,}8 - 25}{3\cdot 10\cdot 0{,}8} \Rightarrow \boldsymbol{\text{συνθ} = -\frac{3}{8}}$ $\quad(\boldsymbol{\theta \cong 112^0})$

δ. Για να εκτελέσει ανακύκλωση, πρέπει στην ψηλότερη θέση να ισχύει $T \geq 0$ και θ = π.

Από την 5.8.3: $\frac{(M+m)\upsilon^2}{\ell} + (M+m)g\sigma\upsilon\nu\theta \geq 0 \Rightarrow \upsilon^2 \geq -g\ell\sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \upsilon^2 \geq g\ell$. (5.8.4)

Από την 5.8.2: $V^2 - 2g\ell(1-\text{συνπ}) = \upsilon^2$ και με αντικατάσταση στην 5.8.4

$$V^2 - 2g\ell(1+1) \geq g\ell \Rightarrow V^2 \geq 5g\ell \overset{5.8.1}{\Longrightarrow} \left(\frac{m}{M+m}\upsilon_0\right)^2 \geq 5g\ell \Rightarrow \upsilon_0 \geq \frac{M+m}{m}\sqrt{5g\ell} \overset{S.I}{\Rightarrow}$$

$$\upsilon_0 \geq \frac{1{,}9+0{,}1}{0{,}1}\sqrt{5\cdot 10\cdot 0{,}5} \Rightarrow \upsilon_0 \geq 100\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{0,min} = 100\frac{m}{s}}$$

Το ποσοστό της ελάττωσης της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}}\cdot 100\% = \left(1 - \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}}\right)\cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(M+m)V^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_{0,min}^2}\right)\cdot 100\% =$$

$$\left(1 - \frac{(M+m)5g\ell}{m\left(\frac{M+m}{m}\sqrt{5g\ell}\right)^2}\right)\cdot 100\% = \left(1 - \frac{m}{M+m}\right)\cdot 100\% = \frac{M}{M+m}\cdot 100\% = 95\%$$

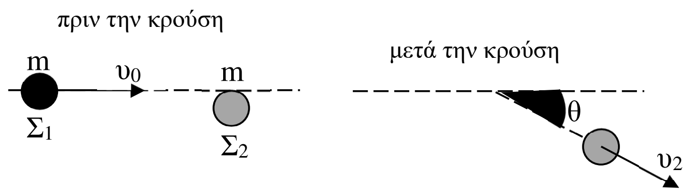
ε. Μετά την κρούση και καθώς το συσσωμάτωμα ανεβαίνει, η ταχύτητά του μειώνεται, η γωνία θ αυξάνεται και επομένως το συνθ μειώνεται. Σύμφωνα με την 5.8.3 η τάση του νήματος θα μειώνεται. Επομένως αν το νήμα δεν σπάσει στην αρχική κατακόρυφη θέση, δε θα σπάσει ποτέ. Αντικαθιστούμε στην 5.8.3 όπου υ = V και θ = 0:

$T = \frac{(M+m)V^2}{\ell} + (M+m)g\sigma\upsilon\nu 0$. Για να μη σπάσει το νήμα πρέπει $T \leq T_{\theta\rho} \Rightarrow$

$$\frac{(M+m)V^2}{\ell} + (M+m)g \leq T_{\theta\rho} \overset{5.8.1}{\Longrightarrow} \frac{2V^2}{0{,}5} + 2\cdot 10 \leq 120 \Rightarrow V^2 \leq 25 \Rightarrow V \leq 5\frac{m}{s}$$

$5.8.1 \Rightarrow \upsilon_0 \leq \frac{2}{0{,}1}\cdot 5\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_0 \leq 100\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{0,max} = 100\frac{m}{s}}$.

Παράδειγμα 5.9 Μια λεία σφαίρα $Σ_1$ μάζας m, κινείται ευθύγραμμα σε λείο οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα $υ_0$, χωρίς να περιστρέφεται. Η σφαίρα $Σ_1$ συγκρούεται ελαστικά με ακίνητη πανομοιότυπη σφαίρα $Σ_2$. Η κρούση των δύο σφαιρών είναι πλάγια και διαρκεί ελάχιστα.



Α. Να αποδείξετε ότι μετά την κρούση και οι δύο σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που είναι κάθετες μεταξύ τους.

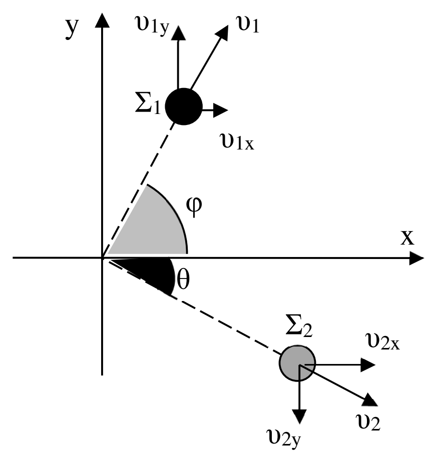
Β. Αν $υ_0 = 8$ m/s και η σφαίρα $Σ_2$ μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα η οποία σχηματίζει γωνία $θ = 30^0$ με τη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας $υ_0$, να υπολογίσετε

α. την ταχύτητα $υ_1$ της σφαίρας $Σ_1$ και το μέτρο της ταχύτητας $υ_2$ της σφαίρας $Σ_2$ μετά την κρούση.

β. το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας της $Σ_1$ το οποίο μεταβιβάστηκε στη $Σ_2$ κατά την κρούση.

Λύση

Α. Το σύστημα των δύο σφαιρών είναι μονωμένο, άρα ισχύει η Α.Δ.Ο.



$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_0 + \vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. (5.12.1)

Η κρούση είναι ελαστική, άρα ισχύει και η Α.Δ.Κ.Ε.

Εκφράζουμε την κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με την ορμή:

$$\left.\begin{array}{r} K = \frac{1}{2}mυ^2 \\ p = mυ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} K = \frac{1}{2}mυ^2 \\ υ = \frac{p}{m} \end{array}\right\} \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 \Rightarrow$$

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

$$K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow K_0 = K_1 + K_2 \Rightarrow \frac{p_0^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} \Rightarrow$$

$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2$. (5.12.2)

Υψώνουμε και το δύο μέλη της 5.12.1 στο τετράγωνο και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων, έχουμε

$$(\vec{p}_0)^2 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \Rightarrow p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\vec{p}_1 \circ \vec{p}_2 \xRightarrow{5.12.2} 2\vec{p}_1 \circ \vec{p}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} p_1 = 0 \\ p_2 = 0 \\ \vec{p}_1 \perp \vec{p}_2 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{r} υ_1 = 0 \\ υ_2 = 0 \\ \vec{υ}_1 \perp \vec{υ}_2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{array}$$

(i) Αν $υ_1 = 0$, τότε από την 5.12.2 προκύπτει $υ_2 = υ_0$, δηλαδή οι σφαίρες ανταλλάσουν ταχύτητες. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο αν η ελαστική κρούση ήταν κεντρική. Επομένως η λύση ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ.

(ii) Αν $υ_2 = 0$, τότε από την 5.12.2 προκύπτει ότι $υ_1 = υ_0$, δηλαδή δεν έγινε κρούση. Επομένως και η λύση αυτή ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ.

(iii) Η λύση αυτή είναι η μόνη ΔΕΚΤΗ. Αυτό σημαίνει ότι μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που είναι κάθετες μεταξύ τους.

B. **α.** Από την Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_0 + \vec{0} = m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2$.

Άξονας x: $m\upsilon_0 + 0 = m\upsilon_{1x} + m\upsilon_{2x} \Rightarrow \upsilon_0 = \upsilon_{1x} + \upsilon_{2x} \Rightarrow \upsilon_0 = \upsilon_1\sigma\upsilon\nu\varphi + \upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta$ (5.12.3)

Άξονας y: $0 + 0 = m\upsilon_{1y} - m\upsilon_{2y} \Rightarrow \upsilon_{1y} = \upsilon_{2y} \Rightarrow \upsilon_1\eta\mu\varphi = \upsilon_2\eta\mu\theta$ (5.12.4)

Σύμφωνα με το ερώτημα Α οι δύο σφαίρες θα κινηθούν σε κάθετες διευθύνσεις, δηλαδή θα ισχύει $\varphi + \theta = 90^0$, άρα $\boldsymbol{\varphi = 60^0}$.

$5.12.4 \Rightarrow \upsilon_1\eta\mu 60^0 = \upsilon_2\eta\mu 30^0 \Rightarrow \upsilon_1\sqrt{3} = \upsilon_2$ (5.12.5)

$5.12.3 \Rightarrow \upsilon_0 = \upsilon_1\frac{1}{2} + \upsilon_2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\upsilon_0 = \upsilon_1 + \sqrt{3}\cdot\upsilon_2 \xRightarrow{5.12.5} 2\upsilon_0 = \upsilon_1 + \sqrt{3}\cdot\upsilon_1\sqrt{3} \Rightarrow 2\upsilon_0 = 4\upsilon_1$

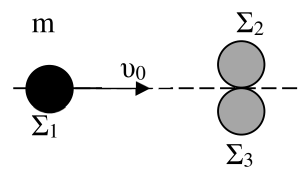
$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon_0}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 4\frac{m}{s}}$$

$$5.12.5 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2 = 4\sqrt{3}\frac{m}{s}}$$

β. Είναι $K_{1,\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$ και $K_{2,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$

$$\Pi(\%) = \frac{K_{2,\tau\varepsilon\lambda}}{K_{1,\alpha\rho\chi}}100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_2^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_0^2}100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{8}\right)^2\cdot 100\% \Rightarrow \boldsymbol{\Pi(\%) = 75\%}$$

Παράδειγμα 5.10 Τρεις πανομοιότυπες λείες σφαίρες Σ_1, Σ_2 και Σ_3, μπορούν να κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο Οι σφαίρες Σ_2 και Σ_3 ηρεμούν εφαπτόμενες μεταξύ τους. Η σφαίρα Σ_1 κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_0 = 10$ m/s, χωρίς να περιστρέφεται. Η διεύθυνση της ταχύτητας υ_0 διέρχεται από το σημείο επαφής των σφαιρών Σ_2 και Σ_3, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κρούση της Σ_1 με τις σφαίρες Σ_2 και Σ_3 είναι ελαστική. Να υπολογίσετε



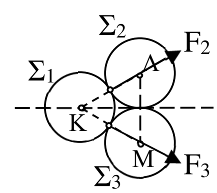
α. τις ταχύτητες των τριών σφαιρών μετά την κρούση τους.

β. το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας της Σ_1 που μεταβιβάστηκε σε κάθε μία από τις σφαίρες Σ_2 και Σ_3 μετά την κρούση.

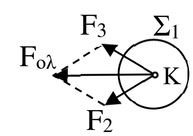
γ. τη μεταβολή της ορμής της Σ_1, αν η μάζα κάθε σφαίρας είναι $m = 0{,}1$ kg.

Λύση

Οι σφαίρες έχουν την ίδια ακτίνα R, επομένως τη στιγμή της κρούσης τα κέντρα τους σχηματίζουν το ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ, πλευράς 2R.



Σχ. 1

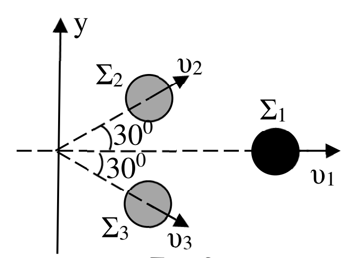


Σχ. 2

Οι δυνάμεις επαφής, ανά δύο, έχουν τη διεύθυνση της διακέντρου (σχ.1). Επομένως οι σφαίρες Σ_2 και Σ_3 θα κινηθούν σε διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνία $\theta_2 = \theta_3 = 30^0$ με τη διεύθυνση της υ_0. Επειδή $F_2 = F_3$, η σφαίρα Σ_1 θα κινηθεί στη διεύθυνση της συνισταμένης τους, δηλαδή στη διεύθυνση της διχοτόμου, άρα στην αρχική της διεύθυνση (σχ.2).

α. Αναλύουμε τις ταχύτητες υ_2 και υ_3 σε συνιστώσες, μία κατά τον άξονα της αρχικής ταχύτητας (άξονας x) και μία κατά τον κάθετο άξονα y. Είναι $\upsilon_{2x} = \upsilon_2\sigma\upsilon\nu 30$, $\upsilon_{2y} = \upsilon_2\eta\mu 30$, $\upsilon_{3x} = \upsilon_3\sigma\upsilon\nu 30$ και $\upsilon_{3y} = \upsilon_3\eta\mu 30$.

Το σύστημα των τριών σφαιρών είναι μονωμένο και κατά τους δύο άξονες, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο. για κάθε άξονα χωριστά.



Σχ. 3

Άξονας x: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi,x} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,x} \to m\upsilon_0 = m\upsilon_1 + m\upsilon_{2\chi} + m\upsilon_{3\chi} \Rightarrow \upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_2\sigma\upsilon\nu 30 + \upsilon_3\sigma\upsilon\nu 30$
$\Rightarrow \upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_2\frac{\sqrt{3}}{2} + \upsilon_3\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5.13.1)
Άξονας y: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi,y} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda,y} \to 0 = 0 + m\upsilon_{2\chi} - m\upsilon_{3\chi} \Rightarrow \upsilon_2\eta\mu 30 = \upsilon_3\eta\mu 30 \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_3$ (5.13.2)
$5.13.1 \xRightarrow{5.13.2} \upsilon_0 = \upsilon_1 + \upsilon_2\sqrt{3}.$ (5.13.3)
Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει και η Α.Δ.Κ.Ε. $K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$
$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 \xRightarrow{5.13.2} \upsilon_0^2 = \upsilon_1^2 + 2\upsilon_2^2.$ (5.13.4)
Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων 5.13.3 και 5.13.4:
$5.13.3 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_0 - \upsilon_2\sqrt{3}.$ (5.13.5)

$$5.13.4 \xRightarrow{5.13.5} \upsilon_0^2 = \left(\upsilon_0 - \upsilon_2\sqrt{3}\right)^2 + 2\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_0^2 = \upsilon_0^2 - 2\sqrt{3}\upsilon_2\upsilon_0 + 3\upsilon_2^2 + 2\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

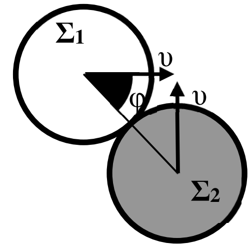
$5\upsilon_2^2 = 2\sqrt{3}\upsilon_2\upsilon_0$. Είναι $\upsilon_2 \neq 0$, γιατί αν $\upsilon_2 = 0$ τότε σημαίνει ότι δεν έγινε κρούση.
Άρα $5\upsilon_2 = 2\sqrt{3}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}\upsilon_0 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2 = 4\sqrt{3}\frac{m}{s}}$.
Από την 5.13.2 προκύπτει $\boldsymbol{\upsilon_2 = \upsilon_3 = 4\sqrt{3}\frac{m}{s}}$.
Από την 5.13.5 (στο S.I): $\upsilon_1 = 10 - 4\sqrt{3}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = -2\frac{m}{s}}$. Το πρόσημο – δηλώνει ότι η υ_1 έχει φορά αντίθετη από αυτή που σημειώνεται στο σχήμα 3.
β. Είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$. Επειδή $\upsilon_2 = \upsilon_3$ είναι $K_2 = K_3 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$. Το ζητούμενο κλάσμα είναι

$$\frac{K_2}{K_{1,\alpha\rho\chi}} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_2^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_0^2} = \left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_0}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{10}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{48}{100}}$$

γ. $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{1,\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{1,\alpha\rho\chi} \to \Delta p_1 = m\upsilon_1 - m\upsilon_0 \Rightarrow \Delta p_1 = m(\upsilon_1 - \upsilon_0) \xRightarrow{S.I} \Delta p_1 = 0{,}1[-2 - 10] \Rightarrow$

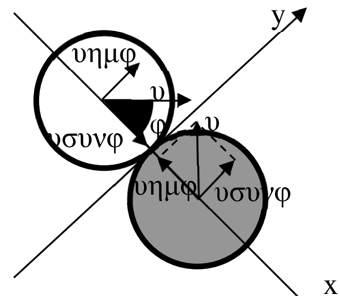
$$\boldsymbol{\Delta p_1 = -1{,}2\frac{kgm}{s}}$$

****Παράδειγμα 5.11** Δύο λείες σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με ίσες μάζες και ίσες ακτίνες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες υ, χωρίς να περιστρέφονται, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται ελαστικά. Τη στιγμή που αρχίζει η σύγκρουση η ταχύτητα της Σ_1 σχηματίζει γωνία φ με τη διάκεντρο των σφαιρών. Μετά την κρούση οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 κινούνται με ταχύτητες μέτρων υ_1' $\kappa\alpha\iota$ υ_2' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν



α. φ = 0 τότε $\upsilon_1' = 0$ και $\upsilon_2' = \upsilon\sqrt{2},\ \theta = 45^0$ (με τον οριζόντιο άξονα).
β. φ = 90^0 τότε $\upsilon_1' = \upsilon\sqrt{2},\ \theta = 45^0\ \kappa\alpha\iota\ \upsilon_2' = 0$.
γ. φ = 45^0 τότε οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.
Σε κάθε μία περίπτωση να κάνετε και ένα σχήμα στο οποίο να φαίνονται οι σφαίρες λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση.
Οι κινήσεις των σφαιρών γίνονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο.
Λύση
Επιλέγουμε δύο ορθογώνιους άξονες, x και y, έτσι ώστε ο άξονας x να συμπίπτει με τη διάκεντρο των σφαιρών, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1. Αναλύουμε τις ταχύτητες υ των δύο σφαιρών σε αυτούς τους άξονες. Είναι $\upsilon_{1,x}$ = υσυνφ, $\upsilon_{1,y}$ = υημφ για τη Σ_1 και $\upsilon_{2,x}$ = - υημφ, $\upsilon_{2,y}$ = υσυνφ για τη Σ_2.

Η κρούση των δύο σφαιρών γίνεται κατά τον άξονα x, ενώ κατά τον άξονα y δεν υπάρχει κρούση (οι σφαίρες κινούνται εφαπτομενικά).



σχήμα 1

<u>Άξονας x:</u> *Οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες, επομένως θα ανταλλάξουν ταχύτητες:* $\upsilon'_{1x} = \upsilon_{2x} \Rightarrow \upsilon'_{1x} = -\upsilon\eta\mu\phi$ (5.14.1)

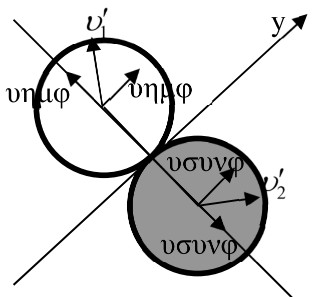
$\upsilon'_{2x} = \upsilon_{1x} \Rightarrow \upsilon'_{2x} = \upsilon\sigma\upsilon\nu\phi$ (5.14.2)

<u>Άξονας y:</u> *Οι σφαίρες διατηρούν τις ταχύτητές τους επειδή κατά τον άξονα y δεν συμβαίνει κρούση.*

Είναι $\upsilon'_{1y} = \upsilon_{1y} \Rightarrow \upsilon'_{1y} = \upsilon\eta\mu\phi$ (5.14.3)

$\upsilon'_{2y} = \upsilon_{2y} \Rightarrow \upsilon'_{2y} = \upsilon\sigma\upsilon\nu\phi$ (5.14.4)

Για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει: $\upsilon'_1 = \sqrt{(\upsilon'_{1x})^2 + (\upsilon'_{1y})^2} \overset{5.14.1}{\underset{5.14.3}{\Rightarrow}}$



σχήμα 2

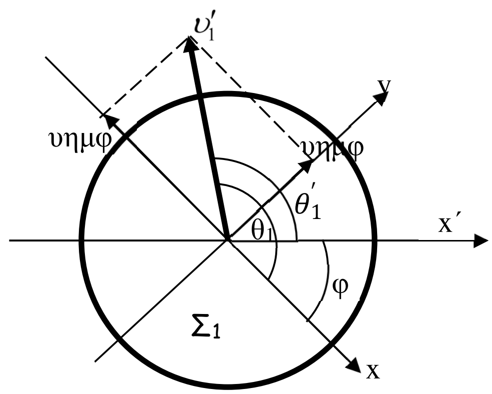
$\upsilon'_1 = \sqrt{\upsilon^2\eta\mu^2\phi + \upsilon^2\eta\mu^2\phi} \Rightarrow \upsilon'_1 = \upsilon\sqrt{2}\cdot\eta\mu\phi$ (5.14.5)

$\upsilon'_2 = \sqrt{(\upsilon'_{2x})^2 + (\upsilon'_{2y})^2} \overset{(5.14.2)}{\underset{(5.14.4)}{\Rightarrow}} \upsilon'_2 = \sqrt{\upsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\phi + \upsilon^2\sigma\upsilon\nu^2\phi} \Rightarrow$

$\upsilon'_2 = \upsilon\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\phi$ (5.14.6)

Η γωνία θ₁ που σχηματίζει η υ'_1 με τον άξονα x υπολογίζεται από τη σχέση $\varepsilon\varphi\theta_1 = \frac{\upsilon'_{1y}}{\upsilon'_{1x}} \overset{5.14.3}{\underset{5.14.2}{\Rightarrow}}$

$\varepsilon\varphi\theta_1 = -1 \Rightarrow \theta_1 = 135^0$. Η γωνία θ_2 που σχηματίζει η υ'_2 με τον άξονα x υπολογίζεται από τη σχέση $\varepsilon\varphi\theta_2 = \frac{\upsilon'_{2y}}{\upsilon'_{2x}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta_2 = 1 \Rightarrow \theta_2 = 45^0$.



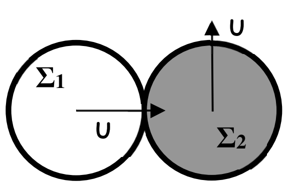
σχήμα 3

Για να υπολογίσουμε τη γωνία θ'_1 που σχηματίζει η ταχύτητα υ'_1 με τον οριζόντιο άξονα (έστω x΄), δουλεύουμε στο διπλανό σχήμα 3:

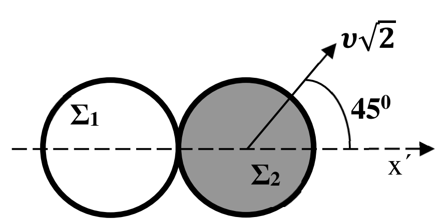
Όπως προκύπτει, η σχέση μεταξύ των γωνιών είναι: $\theta_1 = \theta'_1 + \varphi \Rightarrow \theta'_1 = \theta_1 - \varphi \Rightarrow \theta'_1 = 135^0 - \varphi$ (5.14.7)

Με ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η ταχύτητα υ'_2 της σφαίρας Σ₂ σχηματίζει, με τον οριζόντιο άξονα x΄, γωνία $\theta'_2 = 45^0 - \varphi$ (5.14.8)

α. Αν φ = 0, τότε από την εξίσωση 5.14.5 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon'_1 = 0}$, γιατί ημ0⁰ = 0 και από την εξίσωση 5.14.6 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon'_2 = \upsilon\sqrt{2}}$, γιατί συν0⁰ = 1. Από την 5.14.8 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\theta'_2 = 45^0}$.



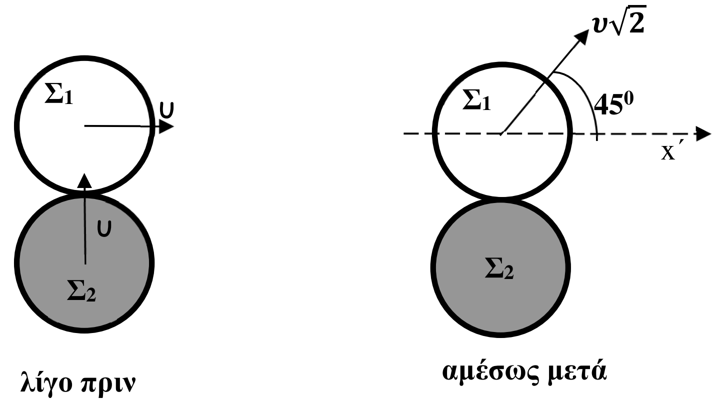
λίγο πριν

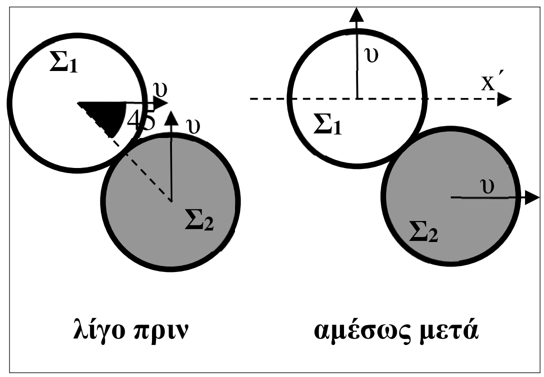


αμέσως μετά

β. Αν φ = 90⁰, τότε από την εξίσωση 5.14.5 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon_1' = \upsilon\sqrt{2}}$, γιατί ημ90^0 = 1 και από την εξίσωση 5.14.6 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon_2' = 0}$, γιατί συν90^0 = 0.

Από την 5.14.7 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\theta_1' = 45^0}$.





γ. Αν φ = 45^0, τότε από την εξίσωση 5.14.5 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon_1' = \upsilon}$, γιατί ημ45^0 = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και από την εξίσωση 5.14.6 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\upsilon_2' = \upsilon}$, γιατί συν45^0 = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Από την 5.14.7 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\theta_1' = 90^0}$ και από την 5.14.8 προκύπτει ότι $\boldsymbol{\theta_2' = 0^0}$. Όπως φαίνεται και από το σχήμα οι δύο σφαίρες έχουν ανταλλάξει ταχύτητες.